

EJERCITACION NUMEROS COMPLEJOS

PARTE 1: FORMA BINOMICA

Ejercicio n° 1:

Resuelva las siguientes operaciones en forma binómica:

a) $(-2 + 6j) + 3 \cdot (4 - j) - 5j =$

b) $(2 - j)^2 \cdot (4 + 3j) =$

c) $\overline{3+2j} + \operatorname{Re}[(5 - 2j)^3] =$

d) $\operatorname{Im}\left[\frac{(4 + 7j) \cdot (6 - 2j)}{2j}\right] + 4j =$

e) $\frac{j(1 - 3j)}{2 + 2j \cdot j^7} =$

Ejercicio n° 2:

Determine para qué valores de x e y son válidas las siguientes igualdades:

a) $(1 - 2y)x + (3 + 5j)y = 1 + 3j$

b) $6x + 2y + (x - 3yj)j = x^2 + (y + 6)j$

Ejercicio n° 3:

Calcule: a) $\frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha)j}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)j} =$ b) $\frac{a + bj}{c + dj} + \frac{a - bj}{c - dj} =$

Ejercicio n° 4:

Dados los números complejos: $z_1 = \sqrt{3} + j$, $z_2 = -\sqrt{3} + 3j$, $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}j$ efectúe:

a) $2z_1 - (z_2^2 - z_3) - \frac{z_2}{z_1} =$

b) $(z_1 - z_2 - \sqrt{3} \cdot z_3)^3 =$

Ejercicio n° 5:

Determine el conjunto de los complejos que cumplan las siguientes condiciones:

a) que su cuadrado sea igual a su conjugado.

b) cuyo conjugado coincide con su inverso

Ejercicio n° 6:

Dado el número complejo $z = \frac{2-xj}{2+xj}$, calcule x para que su parte real sea cero y escriba el valor del complejo z .

Ejercicio n° 7:

Describa y construya la gráfica del lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones: (Considere: $z = x + yj$)

a) $-2 \leq \text{Im}(z) \leq 3 \wedge \text{Re}(z) < -2$

g) $\text{Re}[(1 + 3j)z - (1 + 4j)] < 0$

b) $|z - j| < 2$

h) $\left| \frac{z-5}{4+j} \right| < 1$

c) $z(\bar{z} + 2) = 3$

d) $|-j + \bar{z}| \leq 9$

i) $-\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < \frac{1}{2} \wedge |z| = 2$

e) $|z|^2 + \text{Re}(z^2) = 2$

j) $|z| = 1 \wedge \text{Re}(z) = 1$

f) $1 < |z + j| \leq 2$

Ejercicio n° 8:

Resuelva las siguientes ecuaciones en \mathbb{C} en forma binómica:

a) $(1 + j)z = 1$

f) $z^2 - (2 + j)z + (-1 + 7j) = 0$

b) $\frac{1}{z} = j$

g) $z^2 - (5 + 3j)z + (4 + 20j) = 0$

c) $|z| - z = 1 + 2j$

h) $(2 + j)z^2 - (5 - j)z + (2 - 2j) = 0$

d) $z^2 = 3 + 4j$

i) $z^4 + 16 = 0$

e) $z^2 = 5 - 12j$

j) $z^2 = (1 - j)^4$

Recuerde:

La conocida fórmula resolvente de una cuadrática se puede utilizar con complejos.

Ejercicio n° 9:

a) Escriba una ecuación polinómica de grado 2 con coeficientes complejos tal que una raíz sea real y la otra compleja no real.

b) ¿Sería posible lo mismo si los coeficientes fueran todos reales? ¿Por qué?

Recuerde:

Si z_1 y z_2 son las raíces de: $az^2 + bz + c = 0$ entonces $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \wedge z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

PARTE 2: FORMA POLAR

Ejercicio n° 10:

Complete la siguiente tabla:

Par ordenado	Binómica	Polar	Trigonométrica	Exponencial
	$\sqrt{3} + j$			
$(-2, -2\sqrt{3})$				
		$[2; \pi/4]$		
			$3(\cos \pi + j \sin \pi)$	
	$-4 + 4j$			
				$e^{j5\pi/6}$
$(0, -8)$				

Ejercicio n° 11:

Calcule el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

- a) Dados: $z_1 = 2 e^{j(\pi/2)}$ y $z_2 = -1 + j$ Halle: $z = z_1 + z_2^{10}$
- b) Dados: $z_1 = 16 e^{j(5\pi/6)}$ y $z_2 = 2 e^{j(\pi/4)}$ Halle: $z = z_1 / z_2^3$
- c) Dados: $z_1 = -1 + j\sqrt{3}$ y $z_2 = 2 - 2j$ Halle: $z = z_1^6 - z_2^4$

Ejercicio n° 12:

Sea $z = -1 - \sqrt{3}j$

- Halle todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tal que z^n sea real positivo.
- Para el menor valor hallado, calcule z^n .
- ¿Es posible hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que z^n sea real negativo? Justifique.

PARTE 3: RAICES N-ESIMAS

 Ejercicio n° 13:

Resuelva las siguientes ecuaciones en C en forma polar:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } z^3 + j = 0 & \text{b) } z^4 = 1 + j & \text{c) } \sqrt[3]{\frac{(1-j)}{\sqrt{3}+j}} = z \\ \text{d) } z^6 + 1 = \sqrt{3}j & \text{e) } (-1 + j)z^4 + 1 = 0 & \text{f) } z^6 + 27j = 0 \end{array}$$

 Ejercicio n° 14:Considere la ecuación $z^n - 1 = 0$

- Tomando $n = 3$, halle las raíces de la ecuación y analice si constituyen un grupo bajo la multiplicación.
- Tomando $n = 18$, indique cuales son raíces primitivas.
- Si n es un número primo, indique cuantas raíces son primitivas.

 Ejercicio n° 15:Teniendo en cuenta la forma de calcular raíces n-ésimas de un complejo en forma polar, resuelva los siguientes problemas:

- Halle los vértices de un hexágono regular inscripto en una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 1, sabiendo que uno de ellos es el punto (1,0).
- El número $5j$ es una raíz cúbica de un número complejo, calcule las otras raíces y el número.
- Un cuadrado de centro 0 tiene un vértice en (3,4). Halle las coordenadas de los demás vértices.
- Halle los vértices y grafique el cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$.
- Calcule el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas del complejo $z = -64j$.

 Ejercicio n° 16:Indique la validez de las siguientes afirmaciones, demostrandolas o refutando con un contraejemplo:

- Si w_k es una raíz primitiva de la unidad, entonces k es primo.
- Si n es impar entonces w_2 es una raíz primitiva de orden n de la unidad.
- Las raíces cuartas de todo complejo con argumento π , son dos pares de complejas conjugadas.
- Existen 8 raíces primitivas de la unidad de orden 30.

PARTE 4: LOGARITMO NATURAL Y EXPONENCIALES COMPLEJAS

 Ejercicio n° 17:Halle $\ln z$ para:

a) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}j$

b) $z = -4$

c) $z = -e^{j\pi}$

d) $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right)$

e) $z = e^{-3/2j\pi}$

 Ejercicio n° 18:Sea $z = \left(k+4, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ Halle el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que $\ln(z)$ sea imaginario puro. Ejercicio n° 19:Halle el valor principal de z que verifique las siguientes igualdades:

a) $(1+j)^z = 1$

b) $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2} \right)^z = j$

c) $z = {}^{1+j}\sqrt{j}$

d) Halle módulo de $z = (\sqrt{3} + j)^j$

e) $\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}j}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}j}{2j}$

f) $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{5j}$

PARTE 5: EJERCICIOS COMBINADOS

 Ejercicio n° 20:Halle analíticamente y grafique los conjuntos (Considere: $z = x + jy$)

A = $\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z^2) + z + \bar{z} = |1 + \sqrt{2}j|^2 \}$

B = $\{ z \in \mathbb{C} / z^5 + 4 - 4j = 0 \wedge 5|z|^2 + 3 \operatorname{Re}(z^2) \leq 8 \}$

C = $\{ z \in \mathbb{C} / z^2 - (6-2j)z + 11 - 10j = 0 \wedge |z-3| \leq 2 \}$

D = $\{ z \in \mathbb{C} / |z-2|^2 + 1 \geq 0.5 [\operatorname{Im}(z - \bar{z})]^2 \}$

E = $\{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq 3 \wedge 5|z|^2 - 4 \operatorname{Re}(z^2) \geq 9 \}$

 Ejercicio n° 21:Grafique en el plano complejo cada uno de los siguientes conjuntos. Halle analíticamente y grafique en otro par de ejes la imagen de la función compleja $f(z) = 1/z$ con dominio en cada uno de los conjuntos D.

a) $D = \{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \}$

b) $D = \{ z \in \mathbb{C} / |z-1| = 1 \}$

PARTE 6: SUPERPOSICION DE SEÑALES SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA

Ejercicio n° 22:

Dadas las funciones f y g obtenga la función $f+g$ utilizando fasores:

a) $f(t) = 5 \cos(2t - \frac{\pi}{3})$ y $g(t) = 8 \cos(2t + \frac{\pi}{6})$

b) $f(t) = \text{sen}(5t - \frac{\pi}{2})$ y $g(t) = \text{sen}(5t + \frac{\pi}{3})$

c) $f(t) = \text{sen}(2t + \frac{\pi}{4})$ y $g(t) = \text{sen}(2t - \frac{\pi}{3})$

d) $f(t) = 4 \cos(3t)$ y $g(t) = 6 \text{sen}(3t)$

e) $f(t) = 4 \cos(3t + \frac{\pi}{4})$ y $g(t) = 6 \cos(3t - \frac{\pi}{3})$

Ejercicio n° 23:

Analice la validez de las siguientes proposiciones, justificando:

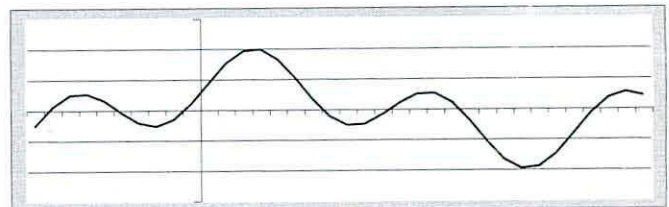
- La suma de dos funciones senoidales es siempre una función senoidal.
- Si $f_1(t) = A_1 \text{sen}(wt + \varphi_1)$ y $f_2(t) = A_2 \text{sen}(wt + \varphi_2) \Rightarrow$ La amplitud de la onda $f_1(t) + f_2(t)$ no puede ser menor que A_1 ni menor que A_2
- La suma de dos funciones senoidales de la misma frecuencia y amplitud con diferencia de fase $0 < \varphi < \pi/2$ tiene siempre amplitud mayor a la de las funciones dadas.

Ejercicio n° 24:

Indique un valor de $\varphi < \pi$ tal que la amplitud de $f(t) = A \cos(wt) + A \cos(wt + \varphi)$ sea la misma A .

Ejercicio n° 25:

La siguiente gráfica corresponde a una función que es suma de dos armónicas simples. Indique si se trata de dos funciones de la misma frecuencia o de distinta frecuencia. Justifique.



EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Finales:



Ejercicio n° 26:

Marcar la única respuesta correcta de cada ítem:

1.	Sean w_0, w_1 y w_2 las raíces cúbicas de $z = 8j$ entonces es FALSO: a) w_2 es imaginaria pura b) ninguna es real c) hay dos complejas conjugadas d) una está en el 1 ^{er} cuadrante
2.	Sabiendo que w es una de las raíces cuartas de $z = -7 + 24j$, entonces se puede asegurar que: a) w no es imaginaria pura b) $ w = 5$ c) la conjugada también es raíz cuarta d) $w = 1 - 2j$
3.	El valor principal del complejo $z = \left(\frac{4}{5} + j\frac{3}{5}\right)^{5j}$ es: a) imaginario puro b) real c) complejo no real ni imaginario puro
4.	Sea z_1 la raíz de mayor módulo de la ecuación: $z^2 + 2z + 3 + j(2z + 6) = 0$ y z_2 la de menor módulo, entonces: • a) z_1 es imaginaria pura b) $z_2 \in I$ cuadrante c) $\bar{z}_1 = z_2$ d) z_2^2 es real
5.	Los complejos que verifican la ecuación $z^2 = 2 \cdot \bar{z}$ son: a) dos complejos conjugados y dos reales b) dos reales y dos imaginarios puros c) sólo dos complejos conjugados d) infinitas soluciones
6.	La ecuación $z^2 - 3z + 3 - j = 0$ tiene como solución: a) dos complejos conjugados b) dos imaginarios puros c) un real y un complejo no real d) ninguna de las anteriores
7.	Dada la ecuación $z^4 + 7 + 24j = 0$: a) sus raíces son dos pares de complejos conjugados b) dos de las raíces son imaginarias puras. c) una raíz es $-2 + j$ d) ninguna de las anteriores

8.	<p>Sabiendo que $(f+g)(t) = 2\sqrt{3} \cos(5t + \frac{\pi}{2}) \wedge f(t) = \sqrt{3} \cos(5t + \frac{\pi}{6})$ entonces $g(t)$ es:</p> <p>a) $g(t) = 3 \cos(5t + \frac{2\pi}{3})$ b) $g(t) = \sqrt{3} \cos(5t + \frac{\pi}{3})$ c) $g(t) = \sqrt{3} \sin(5t - \frac{\pi}{6})$ d) otra</p>
9.	<p>Dada una ecuación polinómica de grado 5 con todos los coeficientes reales, se puede asegurar:</p> <p>a) tiene por lo menos una raíz real b) no todas sus raíces son reales c) hay por lo menos un par de raíces complejas conjugadas d) ninguna de las anteriores</p>
10.	<p>El fasor asociado a la suma de las funciones $f(t) = \sqrt{3} \cos(\omega t + k\frac{\pi}{6})$ y $g(t) = \sqrt{3} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ es imaginario puro si:</p> <p>a) $k = 1$ b) $k = 3$ c) $k = 5$ d) ninguna de las anteriores</p>
11.	<p>Las dos soluciones de la ecuación: $z^2 = 8 + 2\bar{z}$ pertenecen al conjunto:</p> <p>a) $\{(a,b) \in \mathbb{C} / a \neq 0 \wedge b = 0\}$ b) $\{(a,b) \in \mathbb{C} / a > 0 \wedge b = 0\}$ c) $\{(a,b) \in \mathbb{C} / a > 0 \wedge b \neq 0\}$ d) $\{(a,b) \in \mathbb{C} / a = 2b \wedge b \neq 0\}$</p>
12.	<p>Los valores de m y n reales tales que la ecuación $z^2 - mz + n = 0$ tenga como una de sus raíces a $z_1 = 2 - 5j$ son:</p> <p>a) $m = 4 \wedge n = 6$ b) $m = 4 \wedge n = 29$ c) $m = 0 \wedge n = 29$ d) ninguno de los anteriores</p>
13.	<p>El valor principal de $\ln(z)$ siendo $z = -aj$ con $a \in \mathbb{R}^+$ siempre tiene:</p> <p>a) la misma parte real b) la misma parte imaginaria c) el mismo módulo d) ninguno de los anteriores</p>
14.	<p>El valor principal de $\ln(z)$ siendo $z = \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}j$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ siempre tiene:</p> <p>a) la misma parte real b) la misma parte imaginaria c) el mismo módulo d) ninguno de los anteriores</p>

Parte 1 Forma Binómica

① Resuelva las sig. operaciones en forma binómica:

$$a) (-2 + 6j) + 3 \cdot (4 - j) - 5j = -2 + 6j + 12 - 3j - 5j = \boxed{10 - 2j} \checkmark$$

$$b) (2 - j)^2 \cdot (4 + 3j) = (4 - 4j - 1)(4 + 3j) = (3 - 4j)(4 + 3j) = \\ = 12 + 9j - 16j + 12 = \boxed{24 - 7j} \checkmark$$

$$c) \overline{3 + 2j} + \operatorname{Re} [(5 - 2j)^3] = 3 - 2j + \operatorname{Re} [5^3 + 3 \cdot 5^2(-2j) + 3 \cdot 5 \cdot (-2j)^2 + (-2j)^3] = \\ = 3 - 2j + \operatorname{Re} (125 - 150j - 60 + 8j) = 3 - 2j + 65 = \boxed{68 - 2j} \checkmark$$

$$d) \operatorname{Im} \left[\frac{(4 + 7j) \cdot (6 - 2j)}{2j} \right] + 4j = \operatorname{Im} \left[\frac{(24 - 8j + 42j + 14)(-2j)}{(2j)(-2j)} \right] + 4j = \\ = \operatorname{Im} \left[\frac{(38 + 34j)(-2j)}{4} \right] + 4j = \operatorname{Im} \left[\frac{-76j + 68}{4} \right] + 4j = \\ = \operatorname{Im}(-19j + 17) + 4j = \boxed{-19 + 4j} \checkmark$$

$$e) \frac{j(1 - 3j)}{2 + 2j \cdot j^7} = \frac{j + 3}{(2 - 2j) \cdot j^3} = \frac{3 + j}{(2 - 2j)(-j)} = \frac{3 + j}{-2j - 2} = \frac{(3 + j)(-2 + 2j)}{(-2 - 2j)(-2 + 2j)} = \\ = \frac{-6 + 6j - 2j - 2}{8} = \frac{-8 + 4j}{8} = \boxed{-1 + \frac{j}{2}} \checkmark$$

$$\begin{aligned} j^0 &= 1 \\ j^1 &= j \\ j^2 &= -1 \\ j^3 &= -j \end{aligned}$$

② Determine para qué valores de x e y son válidas las sig. igualdades:

a) $(1-2j)x + (3+5j)y = 1+3j$

• $(1-2j)x + (3+5j)y = \overset{\text{Real}}{(x-2xy+3y)} + \overset{\text{Im}}{5jy} = \overset{\text{enunciado}}{1+3j}$

→ $\begin{cases} x-2xy+3y=1 \\ 5y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2x \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = x - \frac{6}{5}x + \frac{9}{5} = 1 \\ \frac{4}{5} = \frac{x}{5} \rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$

$\boxed{x=4 \wedge y=3/5}$ ✓

b) $6x+2j + (x-3yj)j = x^2 + (y+6)j$

• $6x+2j + (x-3yj)j = 6x+2j + xj+3y = (6x+5y) + xj = x^2 + (y+6)j$

→ $\begin{cases} 6x+5y = x^2 \\ x = y+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x+5(x-6) = x^2 = \overset{11x}{6x+5x-30} \\ x^2 - 11x + 30 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

si $x_1 = 6 \rightarrow y_1 = 6-6 = 0$

si $x_2 = 5 \rightarrow y_2 = 5-6 = -1$

$\boxed{(x=6 \wedge y=0) \vee (x=5 \wedge y=-1)}$ ✓

③ Calcule

$$\begin{aligned}
 a) \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha)j}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)j} &= \frac{(1 + \operatorname{tg}(\alpha)j)(1 + \operatorname{tg}(\alpha)j)}{(1 - \operatorname{tg}(\alpha)j)(1 + \operatorname{tg}(\alpha)j)} = \frac{1 + 2\operatorname{tg}(\alpha)j - \operatorname{tg}^2(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} = \\
 &= \frac{\cos^2(\alpha) \left(1 + \frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right)}{\cos^2(\alpha) \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right)} = \frac{\cos^2(\alpha) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)} = \boxed{\cos(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha)j} \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \frac{a+bj}{c+dj} + \frac{a-bj}{c-dj} &= \frac{(c-dj)(a+bj) + (c+dj)(a-bj)}{(c+dj)(c-dj)} = \\
 &= \frac{ac + cbj - adj + db + ca - cbj + adj + db}{c^2 + d^2} = \\
 &= \frac{(2ac + 2bd)}{c^2 + d^2} = \boxed{\frac{2ac + 2bd}{c^2 + d^2}} \checkmark
 \end{aligned}$$

④ Dados los números complejos: $z_1 = \sqrt{3} + j$; $z_2 = \sqrt{3} + 3j$; $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}j$ efectúe:

$$\begin{aligned}
 a) 2z_1 - (z_2^2 - z_3) - \frac{z_2}{z_1} &= 2\sqrt{3} + 2j - [(-\sqrt{3} + 3j)^2 - (2 - 2\sqrt{3}j)] - \frac{-\sqrt{3} + 3j}{\sqrt{3} + j} = \\
 &= 2\sqrt{3} + 2j - (3 - 6\sqrt{3}j - 9 - 2 + 2\sqrt{3}j) - \frac{(-\sqrt{3} + 3j)(\sqrt{3} - j)}{(\sqrt{3} + j)(\sqrt{3} - j)} = \\
 &= 2\sqrt{3} + 2j + 8 + 4\sqrt{3}j - \frac{(-3 + \sqrt{3}j + 3\sqrt{3}j + 3)}{4} = \\
 &= \frac{8\sqrt{3} + 32 + 8j + 16\sqrt{3}j - 4\sqrt{3}j}{4} = \boxed{(8 + 2\sqrt{3}) + (2 + 3\sqrt{3})j} \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) (z_1 - z_2 - \sqrt{3} \cdot z_3)^3 &= (\sqrt{3} + j + \sqrt{3} - 3j - 2\sqrt{3} + 6j)^3 = (4j)^3 = 64j^3 = \\
 &= \boxed{-64j} \checkmark
 \end{aligned}$$

⑤ Determine el conjunto de los complejos que cumplan las siguientes condiciones:

a) que su cuadrado sea igual a su conjugado.

$$z^2 = \bar{z}$$

$$(a + bj)^2 = a - bj$$

$$a^2 + 2abj - b^2 = a^2 - b^2 + 2abj = a - bj$$

$$\begin{aligned} \text{Si } b=0 &\rightarrow a=a^2 \\ &\rightarrow a=0 \vee a=1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a & \rightarrow (-1/2)^2 - b^2 = -1/2 \rightarrow b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ 2ab = -b & \xrightarrow{\text{si } b \neq 0} a = \frac{-b}{2b} = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{a = -1/2} \quad \wedge |b| = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j} \quad \wedge \quad \boxed{z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j} \quad \wedge \quad \boxed{z_3 = 0} \quad \wedge \quad \boxed{z_4 = 1} \quad \wedge$$

↔ si $b \neq 0$ ↗

b) cuyo conjugado coincide con su inverso

$$z = a + bj$$

$$\bar{z} = a - bj$$

$$z^{-1} = \frac{a - bj}{a^2 + b^2}$$

$$\rightarrow \bar{z} = z^{-1} \rightarrow a - bj = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bj}{a^2 + b^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ b = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases} \rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = 1}$$

⑥ Dado el número complejo $z = \frac{2 - xj}{2 + xj}$, calcule x para que su parte real sea cero y escriba el valor del complejo z

$$z = \frac{2 - xj}{2 + xj} = \frac{(2 - xj) \cdot (2 - xj)}{(2 + xj)(2 - xj)} = \frac{4 - 4xj - x^2}{4 + x^2} = \frac{4 - x^2}{4 + x^2} - \frac{4xj}{4 + x^2}$$

$$\text{Re} \left(\frac{4 - x^2}{4 + x^2} \right) = 0 \rightarrow \frac{4 - x^2}{4 + x^2} = 0 \rightarrow 4 + x^2 \neq 0 \wedge 4 - x^2 = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x^2 = 4}$

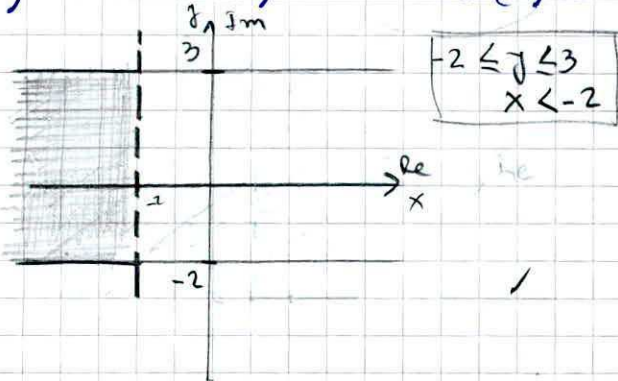
$$\text{con } x=2 \rightarrow z_1 = \frac{(2 - 2j) \cdot (2 - 2j)}{(2 + 2j)(2 - 2j)} = \frac{2^2 - 8j - 4}{8} = \boxed{-j = z_1}$$

$$z_2 = \frac{(2 + 2j) \cdot (2 + 2j)}{(2 - 2j)(2 + 2j)} = \frac{4 + 8j - 4}{8} = \boxed{j = z_2}$$

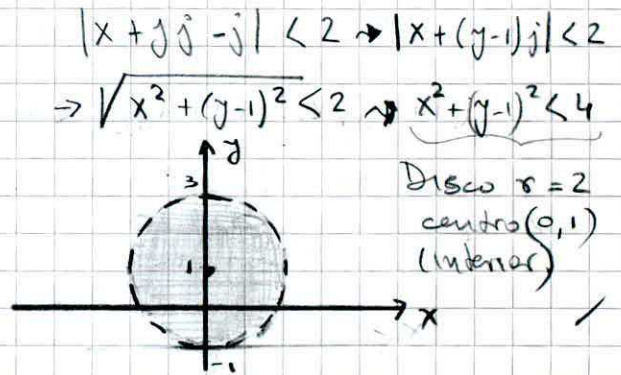
$$\boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ x = -2 \end{matrix}} \quad \checkmark$$

7) Describa y construya la gráfica del lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones:
(considere: $z = x + yj$)

a) $-2 \leq \text{Im}(z) \leq 3 \wedge \text{Re}(z) < -2$



b) $|z - j| < 2$

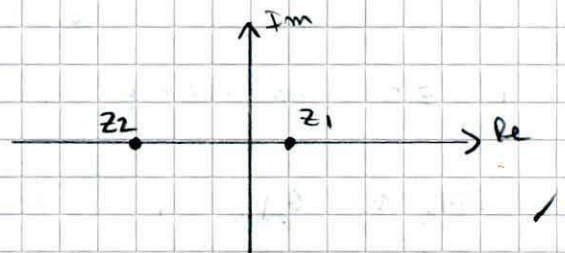


c) $z(\bar{z} + z) = 3$

$$z\bar{z} + z^2 = 3 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x + j^2 = 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 + 2x = 3 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$z_1 = 1 ; z_2 = -3$



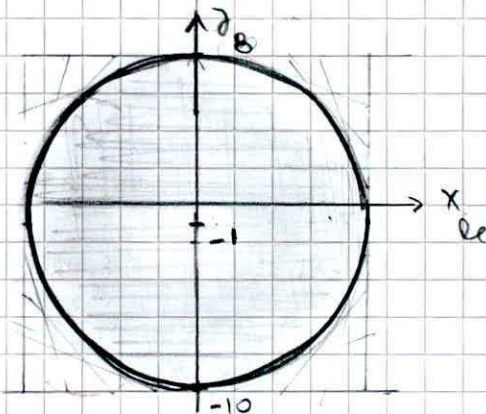
d) $|-j + \bar{z}| \leq 9$

$$|-j + x - jy| \leq 9$$

$$|x - (y+1)j| \leq 9$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 9$$

$$x^2 + (y+1)^2 \leq 81$$



e) $|z|^2 + \text{Re}(z^2) = 2$

$$x^2 + y^2 + \text{Re}(x^2 + 2xj - y^2) = 2$$

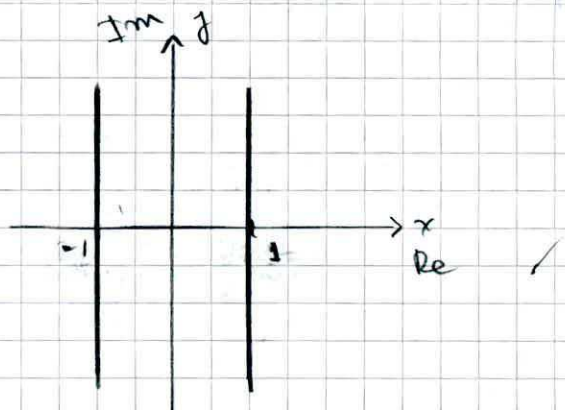
$$x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

No hay restricción para "y"



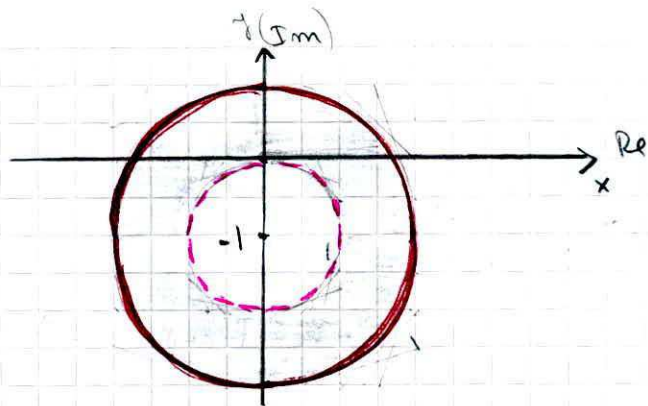
$$Hf) 1 < |z+j| \leq 2$$

$$1 < |x+jj+j| \leq 2$$

$$1 < |x+(j+1)j| \leq 2$$

$$1 < \sqrt{x^2+(j+1)^2} \leq 2$$

$$1 < x^2+(j+1)^2 \leq 4$$



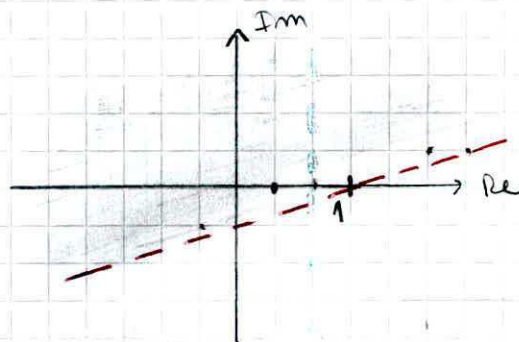
$$g) \operatorname{Re} [(1+3j)z - (1+4j)] < 0$$

$$\operatorname{Re} [(1+3j)(x+jj) - (1+4j)] < 0$$

$$\operatorname{Re} [x+jj+3xj-3j-1-4j] < 0$$

$$\operatorname{Re} [(x-3j-1) + (y+3x-4)j] < 0$$

$$\Rightarrow x-3j-1 < 0 \Rightarrow y > \frac{x-1}{3}$$

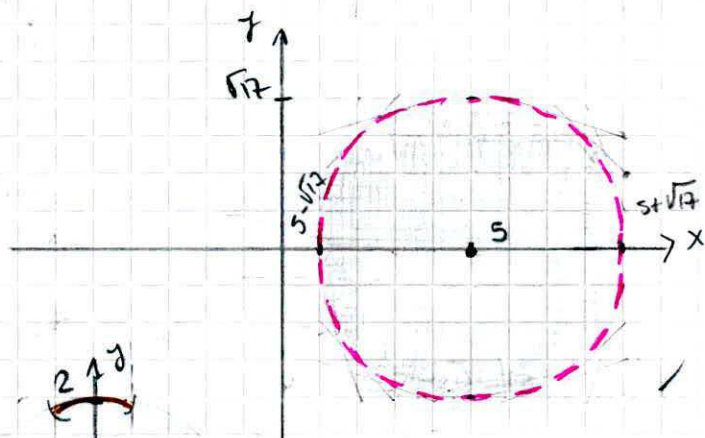


$$h) \left| \frac{z-5}{4+j} \right| < 1 \rightarrow \frac{|z-5|}{|4+j|} < 1$$

$$|(x-5)+jj| < |4+j|$$

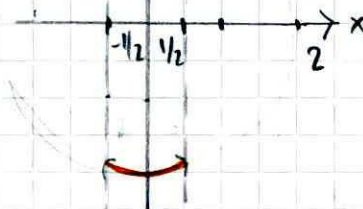
$$\sqrt{(x-5)^2+j^2} < \sqrt{16^2+1^2}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2+j^2 < 17^2$$



$$i) -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2} \wedge |z|=2$$

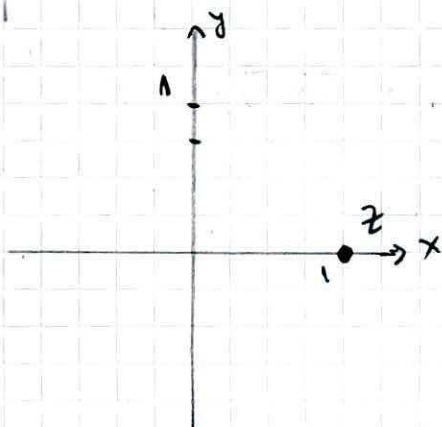
$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \wedge x^2+y^2=4$$



$$j) |z|=1 \wedge \operatorname{Re}(z)=1$$

$$x^2+y^2=1 \quad x=1$$

$$y^2=0 \rightarrow z=(1,0)$$



8) Resuelva las sig. ecuaciones en \mathbb{C} en forma binómica =

a) $(1+j)z = 1$

$$z = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-j}{2} \rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} - \frac{j}{2}} \checkmark$$

b) $\frac{1}{z} = j$

$$\frac{1}{j} = z = \frac{-j}{j(-j)} = \frac{j}{-1} \rightarrow \boxed{z = -j}$$

c) $|z| - z = 1 + 2j$

$$\sqrt{x^2+y^2} - x - yj = 1 + 2j \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \rightarrow \boxed{j = -2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} = 1+x &\rightarrow x^2+y^2 = (1+x)^2 = x^2+2x+1 \\ \rightarrow y^2 = 2x+1 &\xrightarrow{j=-2} 4 = 2x+1 \rightarrow x = 3/2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} = 1+x \\ \rightarrow y^2 = 2x+1 \end{aligned}} \right\} \boxed{z = \frac{3}{2} - 2j} \checkmark$$

d) $z^2 = 3 + 4j \rightarrow \text{sg}(\text{Re}(z)) = \text{sg}(\text{Im}(z))$

$$z = \pm \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z|-x}{2}} j \quad x=3, |z|=5$$

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5+3}{2}} \pm \sqrt{\frac{5-3}{2}} j \rightarrow \boxed{z_1 = 2+j; z_2 = -2-j} \checkmark$$

e) $z^2 = 5 - 12j \rightarrow \text{sg}(\text{Re}(z)) \neq \text{sg}(\text{Im}(z))$

$$|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13, x=5$$

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} \mp \sqrt{\frac{|z|-x}{2}} j \quad z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{13+5}{2}} \mp \sqrt{\frac{13-5}{2}} j$$

$$\boxed{z_1 = 3 - 2j \quad z_2 = -3 + 2j} \checkmark$$

$$8.f) z^2 - (2+j)z + (-1+7j) = 0$$

$$a = 1 ; b = -(2+j) ; c = (-1+7j)$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(2+j) \pm \sqrt{(-2-j)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1+7j)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{2+j \pm \sqrt{4+4j-1+4-28j}}{2} = \frac{2+j \pm \sqrt{7-24j}}{2} = \frac{2+j \pm w}{2} \quad \textcircled{I}$$

hallo $w = \sqrt{7-24j} \rightarrow w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{25+7}{2}} - \sqrt{\frac{25-7}{2}} \rightarrow \begin{cases} w_1 = 4-3j \\ w_2 = -4+3j \end{cases}$

$|w| = 25$
 $x = 7$

$$\textcircled{I} z_{1,2} = \frac{2+j \pm w}{2} \rightarrow \begin{aligned} z_1 &= \frac{2+j+w_1}{2} = \frac{2+j+4-3j}{2} \rightarrow z_1 = 3-j \\ z_2 &= \frac{2+j+w_2}{2} = \frac{2+j-4+3j}{2} \rightarrow z_2 = -1+2j \end{aligned}$$

$$g) z^2 - (5+3j)z + (4+20j) = 0$$

$$a = 1 ; b = -(5+3j) ; c = 4+20j$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5+3j \pm \sqrt{(5+3j)^2 - 4(4+20j)}}{2} =$$

$$= \frac{5+3j \pm \sqrt{25-9+30j-16-80j}}{2} = \frac{5+3j \pm \sqrt{-50j}}{2} = \frac{5+3j \pm w}{2} \quad \textcircled{I}$$

hallo w :

$$w = \sqrt{-50j} \rightarrow w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{50}{2}} - \sqrt{\frac{50}{2}}j \rightarrow \begin{cases} w_1 = 5-5j \\ w_2 = -5+5j \end{cases}$$

$$\textcircled{I} z_{1,2} = \frac{5+3j \pm w}{2} \rightarrow \begin{aligned} z_1 &= \frac{5+3j+w_1}{2} = \frac{5+3j+5-5j}{2} = \frac{10-2j}{2} \\ z_2 &= \frac{5+3j+w_2}{2} = \frac{5+3j-5+5j}{2} = \frac{8j}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 = 5-j ; z_2 = 4j} \quad \checkmark$$

$$8. h) (2+j)z^2 - (5-j)z + (2-2j) = 0$$

$$a = (2+j) ; b = -(5-j) ; c = 2-2j$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5-j \pm \sqrt{25-1-10j-4(2+j)(2-2j)}}{2(2+j)}$$

$$= \frac{5-j \pm \sqrt{24-10j-4(4-4j+2j+2)}}{4+2j} = \frac{5-j \pm \sqrt{24-10j-24+8j}}{4+2j}$$

$$= \frac{5-j \pm \sqrt{-2j}}{4+2j} = \frac{5-j \pm w}{4+2j} \quad (\pm)$$

$$\rightarrow w = \sqrt{-2j} \rightarrow w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}}j \rightarrow \boxed{w_1 = 1-j \quad w_2 = -1+j}$$

$\left. \begin{array}{l} |w| = 2 \\ x = 0 \end{array} \right\} \nearrow$

$$(\pm) z_{1,2} = \frac{5-j \pm w_{1,2}}{4+2j} \rightarrow z_1 = \frac{5-j+1-j}{(4+2j)} = \frac{(6-2j)(4-2j)}{(4+2j)(4-2j)} = \frac{24-12j-8j-4}{20} = \boxed{1-j = z_1}$$

$$z_2 = \frac{5-j+w_2}{4+2j} = \frac{5-j-1+j}{4+2j} = \frac{4}{(4+2j)} \cdot \frac{(4-2j)}{(4-2j)} = \frac{16-8j}{20} = \boxed{0.8 - 0.4j = z_2}$$

$$\boxed{z_1 = 1-j \quad z_2 = 4/5 - 2/5j} \quad \checkmark$$

$$i) z^4 + 16 = 0$$

$$z^4 = -16 \rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[2]{\sqrt{-16}} = \sqrt[2]{w} ; w = \sqrt{-16} \rightarrow w_{1,2} = \pm 4j \rightarrow \begin{array}{l} w_1 = 4j \\ w_2 = -4j \end{array}$$

$$z_{1,2,3,4} = \sqrt{w_{1,2}} \rightarrow z_{1,2} = \sqrt{4j} = \pm \sqrt{2} + \sqrt{2}j \rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}j ; z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}j}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} |z| = 4, x=0 \\ z_{3,4} = \sqrt{-4j} = \pm \sqrt{2} - \sqrt{2}j \end{array} \rightarrow \boxed{z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}j ; z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j} \quad \checkmark$$

$$j) z^2 = (1-j)^4$$

$$z = \pm \sqrt{(1-j)^4} = \pm (1-j)^2 = \pm (1-1-2j) \rightarrow \boxed{z_1 = -2j} \\ \boxed{z_2 = 2j} \quad \checkmark$$

9) a) Escriba una ecuación polinómica de grado 2 con coeficientes complejos tal que una raíz sea real y la otra compleja no real

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\text{se que } \frac{-b}{a} = z_1 + z_2 \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = z_1 \cdot z_2$$

$$\text{tomamos } a=1, \quad z_1=2, \quad z_2=j:$$

$$\rightarrow \frac{-b}{a} = 2+j \rightarrow \frac{b}{a} = -(2+j)$$

$$\rightarrow \frac{c}{a} = 2 \cdot j \rightarrow \boxed{z^2 - (2+j)z + 2j = 0}$$

b) ¿sería posible lo mismo si los coeficientes fueran reales? ¿Por qué?

No sería posible. Si el polinomio tiene raíces reales, si existe alguna raíz compleja, también lo será su conjugado. ∴ las raíces complejas van de a pares → si el polinomio tiene grado par → tiene que tener raíces reales y complejas en cantidades pares.

10) Complete la sig. tabla:

Parte 2): Forma Polar

Por ordenado	Binómica	Polar	Trigonométrica	Exponencial
$(\sqrt{3}, 1)$	$\sqrt{3} + j$	$[2; \pi/6]$	$2(\cos \pi/6 + j \sin \pi/6)$	$2 e^{j\pi/6}$
$(-2, -2\sqrt{3})$	$-2 - 2\sqrt{3}j$	$[4; \pi/3]$	$4(\cos \pi/3 + j \sin \pi/3)$	$4 e^{j\pi/3}$
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\sqrt{2} + \sqrt{2}j$	$[2; \pi/4]$	$2(\cos \pi/4 + j \sin \pi/4)$	$2 e^{j\pi/4}$
$(-3, 0)$	-3	$[3; \pi]$	$3(\cos \pi + j \sin \pi)$	$3 e^{j\pi}$
$(-4, 4)$	$-4 + 4j$	$[4\sqrt{2}; 3\pi/4]$	$4\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4})$	$4\sqrt{2} e^{j\frac{3\pi}{4}}$
$(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$	$[1; 5\pi/6]$	$\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6}$	$e^{j5\pi/6}$
$(0, -8)$	$-8j$	$[8; 3\pi/2]$	$8(\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2})$	$8 e^{j\frac{3\pi}{2}}$

(1) Calcule el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) Dados: $z_1 = 2e^{j(\pi/2)}$ y $z_2 = -1 + j$ Halle $z = z_1 + z_2^{10}$

$$z_1 = [2; \frac{\pi}{2}]$$

$$z_2 = [\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}] \rightarrow z_2^{10} = [\sqrt{2}^{10}; \frac{3\pi}{4} \cdot 10] = [2^5; \frac{15\pi}{2}] = [32; 7.5\pi] \quad \equiv \frac{3\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 2j \\ z_2^{10} = -32j \end{array} \right\} z = z_1 + z_2^{10} = 2j - 32j = \boxed{-30j = z}$$

b) Dados: $z_1 = 16e^{j\frac{5\pi}{6}}$ y $z_2 = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$ Halle: $z = \frac{z_1}{z_2^3}$

$$z_1 = [16; \frac{5\pi}{6}]$$

$$z_2 = [2; \frac{\pi}{4}] \rightarrow z_2^3 = [2^3; 3 \cdot \frac{\pi}{4}] = [8; \frac{3\pi}{4}]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2^3} = \frac{[16; \frac{5\pi}{6}]}{[8; \frac{3\pi}{4}]} = [\frac{16}{8}; (\frac{5}{6} - \frac{3}{4})\pi] = [2; \frac{\pi}{12}] \rightarrow \boxed{z = e^{j\frac{\pi}{12}}}$$

c) Dados: $z_1 = -1 + j\sqrt{3}$ y $z_2 = 2 - 2j$ Halle $z = z_1^6 - z_2^4$

$$z_1 = [2; \frac{2\pi}{3}] \rightarrow z_1^6 = [2^6; \frac{2\pi}{3} \cdot 6] = [64; 4\pi] = [64; 0] \rightarrow z_1^6 = 64$$

$$z_2 = [2\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}] \rightarrow z_2^4 = [2\sqrt{2}^4; \frac{7\pi}{4} \cdot 4] = [64; 7\pi] = [64; \pi] \rightarrow z_2^4 = -64$$

$$z = z_1^6 - z_2^4 = 64 - (-64) = \boxed{128 = z}$$

12) Sea $z = -1 - \sqrt{3}j$



a) Halle todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tal que z^n sea real positivo

$$z = [2; \frac{4}{3}\pi] \rightarrow z^n = [2; \frac{4}{3}\pi]^n = [2^n; n \frac{4}{3}\pi]$$

para que z^n real positivo $\rightarrow n \frac{4}{3}\pi = 2k\pi$

$$\rightarrow n \frac{2}{3} = k, \frac{n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{Z}}{\text{Siempre par}}, n = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} > 0$$



b) Para el menor valor hallado, calcule z^n

el menor valor hallado es $n = 3 \times 1 = 3 = n$

$$z^3 = [2^3; \frac{4}{3}\pi \cdot 3] = [8; 4\pi] \rightarrow \boxed{z^3 = 8}$$

c) ¿es posible hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que z^n sea real negativo? Justifique $k \in \mathbb{Z}$

No es posible pues para que z^n sea real negativo $\rightarrow n \frac{4}{3}\pi = (2k+1)\pi$

$$\rightarrow \frac{4}{3}n = 2k+1 \rightarrow 4n = 6k+3 \text{ Siempre impar.}$$

Siempre par

13) Resuelva las sig. ecuaciones en \mathbb{C} en forma polar:

Parte 3
Raíces n-ésimas

a) $z^3 + j = 0$

$$z^3 = -j = [1; \frac{3}{2}\pi] \rightarrow w_0 = [\sqrt[3]{1}; \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}] \rightarrow \boxed{w_0 = [1; \frac{\pi}{2}]} \checkmark$$

$$w_1 = [1; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}] \rightarrow \boxed{w_1 = [1; \frac{7\pi}{6}]} \checkmark$$

$$w_2 = [1; \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}] \rightarrow \boxed{w_2 = [1; \frac{11\pi}{6}]} \checkmark$$

b) $z^4 = 1 + j \rightarrow z^4 = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]$

$$w_0 = [\sqrt[4]{\sqrt{2}}; \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}] = [\sqrt[8]{2}; \frac{\pi}{16}] = w_0 \checkmark$$

$$w_1 = [\sqrt[4]{\sqrt{2}}; \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{4}] = [\sqrt[8]{2}; \frac{9\pi}{16}] = w_1 \checkmark$$

$$w_2 = [\sqrt[4]{\sqrt{2}}; \frac{\frac{\pi}{4} + \pi}{4}] = [\sqrt[8]{2}; \frac{17\pi}{16}] = w_2 \checkmark$$

$$w_3 = [\sqrt[4]{\sqrt{2}}; \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}}{4}] = [\sqrt[8]{2}; \frac{25\pi}{16}] = w_3 \checkmark$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{1-j}{\sqrt{3}+j}} = z$$

$$z^3 = \frac{1-j}{\sqrt{3}+j} = \frac{[\sqrt{2}; \frac{7}{4}\pi]}{[2; \frac{\pi}{6}]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{6}\right)\pi \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{19}{12}\pi \right] = z^3$$

$$w_0 = \left[\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}; \frac{19}{36}\pi \right] \rightarrow w_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{19}{36}\pi \right] \checkmark$$

$$w_1 = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{19}{36}\pi + \frac{2\pi}{3} \right] \rightarrow w_1 = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{43}{36}\pi \right] \checkmark$$

$$w_2 = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{19}{36}\pi + \frac{4}{3}\pi \right] \rightarrow w_2 = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{67}{36}\pi \right] \checkmark$$

$$d) z^6 + 1 = \sqrt{3}j$$

$$z^6 = -1 + \sqrt{3}j = \left[2; \frac{2}{3}\pi \right]$$

$$w_0 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{2}{3 \times 6}\pi \right] \rightarrow w_0 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{9} \right] \checkmark$$

$$w_1 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow w_1 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{4}{9}\pi \right] \checkmark$$

$$w_2 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \right] \rightarrow w_2 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{7}{9}\pi \right] \checkmark$$

$$w_3 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{9} + \pi \right] \rightarrow w_3 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{10}{9}\pi \right] \checkmark$$

$$w_4 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} \right] \rightarrow w_4 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{13}{9}\pi \right] \checkmark$$

$$w_5 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{9} + \frac{5\pi}{3} \right] \rightarrow w_5 = \left[\sqrt[6]{2}; \frac{16}{9}\pi \right] \checkmark$$

$$13.e) (-1+j)z^4 + 1 = 0$$

$$z^4 = \frac{-1}{-1+j} = \frac{1}{1-j} \cdot \frac{(1+j)}{(1+j)} = \frac{1+j}{2} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$w_0 = \left[\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{2}}} ; \frac{\pi}{4 \times 4} \right] \rightarrow \boxed{w_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[8]{2}} ; \frac{\pi}{16} \right]} \checkmark$$

$$w_1 = \left[\frac{1}{\sqrt[8]{2}} ; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \boxed{w_1 = \left[\frac{1}{\sqrt[8]{2}} ; \frac{9\pi}{16} \right]} \checkmark$$

$$w_2 = \left[\frac{1}{\sqrt[8]{2}} ; \frac{\pi}{16} + \pi \right] \rightarrow \boxed{w_2 = \left[\frac{1}{\sqrt[8]{2}} ; \frac{17\pi}{16} \right]} \checkmark$$

$$w_3 = \left[\frac{1}{\sqrt[8]{2}} ; \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \boxed{w_3 = \left[\frac{1}{\sqrt[8]{2}} ; \frac{25\pi}{16} \right]} \checkmark$$

$$f) z^6 + 27j = 0$$

$$\frac{2k\pi}{n}$$

$$z^6 = -27j = \left[27 ; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\boxed{w_0 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{\pi}{4} \right]} \checkmark$$

$$\frac{2}{6} w_1 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow \boxed{w_1 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{7\pi}{12} \right]} \checkmark$$

$$\frac{4}{6} w_2 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right] \rightarrow \boxed{w_2 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{11\pi}{12} \right]} \checkmark$$

$$\frac{6}{6} w_3 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{\pi}{4} + \pi \right] \rightarrow \boxed{w_3 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{5\pi}{4} \right]} \checkmark$$

$$\frac{8}{6} w_4 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right] \rightarrow \boxed{w_4 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{19\pi}{12} \right]} \checkmark$$

$$\frac{10}{6} w_5 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} \right] \rightarrow \boxed{w_5 = \left[\sqrt[6]{27} ; \frac{23\pi}{12} \right]} \checkmark$$

14) considere la ecuación $z^n - 1 = 0$

a) tomando $n=3$, halle las raíces de la ecuación y analice si constituye un grupo bajo la multiplicación

$$z^3 = 1 = [1; 0]$$

$$w_0 = [1; 0] \quad w_1 = [1; \frac{2\pi}{3}] \quad w_2 = [1; \frac{4\pi}{3}]$$

- $w_0 \cdot w_0 = [1; 0] \cdot [1; 0] = [1 \cdot 1; 0+0] = [1; 0] \rightarrow w_0 \cdot w_0 = w_0$
- $w_0 \cdot w_1 = [1; 0] \cdot [1; \frac{2\pi}{3}] = [1 \cdot 1; 0 + \frac{2\pi}{3}] = [1; \frac{2\pi}{3}] = w_1 \rightarrow w_0 \cdot w_1 = w_1$
- $w_0 \cdot w_2 = [1; 0] \cdot [1; \frac{4\pi}{3}] = [1; \frac{4\pi}{3}] \rightarrow w_0 \cdot w_2 = w_2$
- $w_1 \cdot w_1 = [1; \frac{2\pi}{3}] \cdot [1; \frac{2\pi}{3}] = [1; \frac{4\pi}{3}] \rightarrow w_1 \cdot w_1 = w_2$
- $w_1 \cdot w_2 = [1; \frac{2\pi}{3}] \cdot [1; \frac{4\pi}{3}] = [1; 2\pi] = [1; 0] \rightarrow w_1 \cdot w_2 = w_0$
- $w_2 \cdot w_2 = [1; \frac{4\pi}{3}] \cdot [1; \frac{4\pi}{3}] = [1; \frac{8\pi}{3}] = [1; \frac{2\pi}{3}] = w_1 \rightarrow w_2 \cdot w_2 = w_1$

w_0 es elemento neutro

la multiplicación es conmutativa en estos casos.

•	w_0	w_1	w_2
w_0	w_0	w_1	w_2
w_1	w_1	w_2	w_0
w_2	w_2	w_0	w_1

es simétrica (es conmutativa)

w_0 es el elemento neutro

tienen inverso y es asociativa

es un grupo abeliano

b) tomando $n=18$, indique cuáles son raíces primitivas

$n=18 \rightarrow$ Raíces primitivas: w_k tal que $(k, 18) = 1$

$$\rightarrow w_1; w_5; w_7; w_{11}; w_{13}; w_{17}$$

c) Si n es un número primo, indique cuántas raíces son primitivas.

Si n es primo $\rightarrow \varphi(n) = \# \{k < n\} \rightarrow$ tiene $\varphi(n)$ raíces primitivas

ej. $n=3 \rightarrow w_1, w_2$ son primitivas

$n=5 \rightarrow w_1, w_2, w_3, w_4$

$n=7 \rightarrow w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$

15) Teniendo en cuenta la forma de calcular raíces n -ésimas de un complejo en forma polar, resuelva los sig. problemas:

a) Halle los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 1, sabiendo que uno de ellos es el punto $(1,0)$

$$z^6 = [1; 0] \rightarrow w_0 = [1; 0] = (1, 0)$$

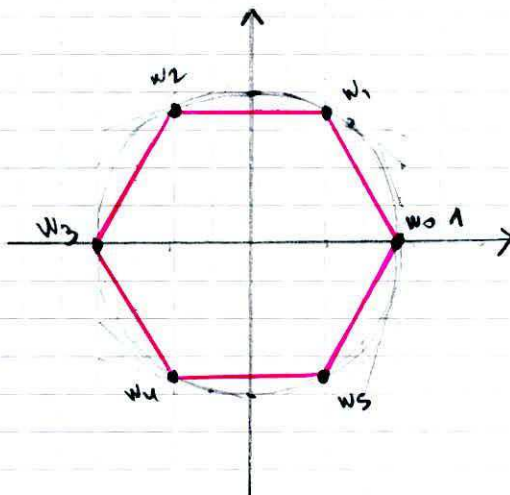
$$\frac{2}{6} \quad w_1 = [1; \frac{\pi}{3}] = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\frac{4}{6} \quad w_2 = [1; \frac{2\pi}{3}] = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\frac{6}{6} \quad w_3 = [1; \pi] = (-1, 0)$$

$$\frac{8}{6} \quad w_4 = [1; \frac{4}{3}\pi] = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\frac{10}{6} \quad w_5 = [1; \frac{5}{3}\pi] = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$



b) El número $5j$ es una raíz cúbica de un complejo, calcule las otras raíces y el número.

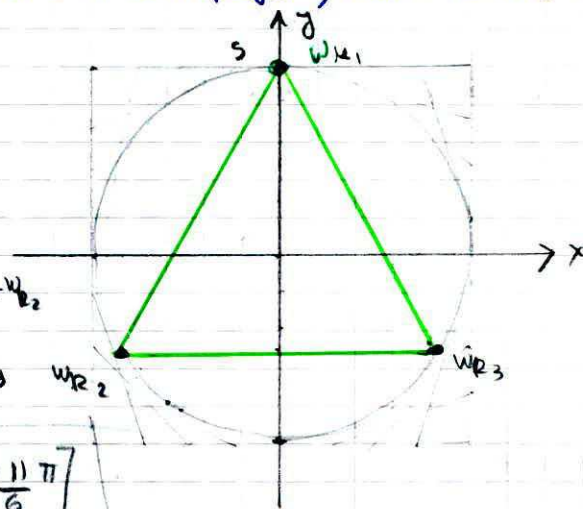
$$w_{R0} = 5j = [5; \frac{\pi}{2}] = (0, 5) = w_{R1}$$

Los vértices rotan $\frac{2\pi}{3} \rightarrow$ raíz cúbica

$$w_{R1} = [5; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}] = [5; \frac{7\pi}{6}] = (-\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}) = w_{R2}$$

$$w_{R2} = [5; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}] = [5; \frac{5\pi}{6}] = (\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}) = w_{R3}$$

$$w_0 = [5; \frac{\pi}{2}] ; w_1 = [5; \frac{7\pi}{6}] ; w_2 = [5; \frac{5\pi}{6}]$$



c) Un cuadrado de centro O tiene un vértice $(3,4)$. Halle los coordenadas de los demás vértices.

Hallo $|z| : \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 cuadrado \rightarrow hallo raíces de z^4

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{op}{ady} = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha = \text{arctg}(4/3)$$

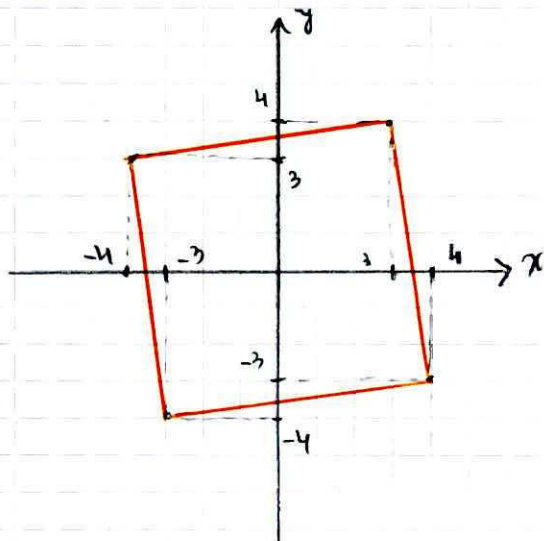
el ángulo rota $\frac{2\pi}{4} = \pi/2$
 $4 \rightarrow$ pues es un cuadrado

$$w_{R0} = [5; \text{arctg}(4/3)] \rightarrow w_{R1} = (3, 4)$$

$$w_{R1} = [5; \text{arctg}(4/3) + \pi/2] \rightarrow w_{R2} = (-4, 3)$$

$$w_{R2} = [5; \text{arctg}(4/3) + \pi] \rightarrow w_{R3} = (-3, -4)$$

$$w_{R3} = [5; \text{arctg}(4/3) + \frac{3}{2}\pi] \rightarrow w_{R4} = (4, -3)$$



15. a) Halle los vértices y grafique el cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de las raíces de ecuación $z^4 + 4 = 0$

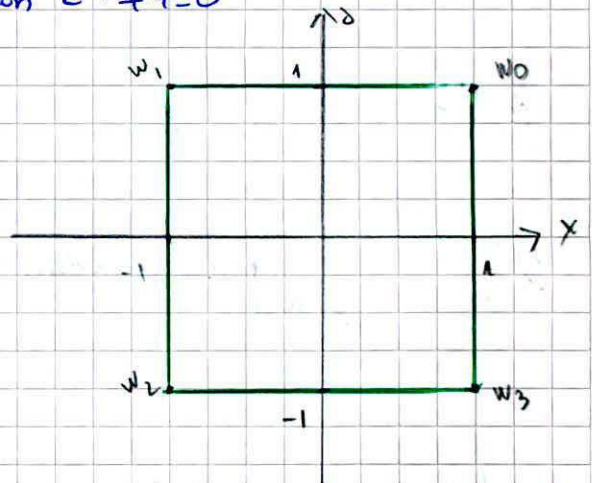
$$z^4 = -4 = [4; \pi]$$

$$\frac{0}{4} \quad w_0 = [\sqrt[4]{4}; \frac{\pi}{4}] = (1, 1) = 1+j = w_0$$

$$\frac{2}{4} \quad w_1 = [\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi] = (-1, 1) = -1+j = w_1$$

$$\frac{4}{4} \quad w_2 = [\sqrt{2}; \frac{5}{4}\pi] = (-1, -1) = -1-j = w_2$$

$$\frac{6}{4} \quad w_3 = [\sqrt{2}; \frac{7}{4}\pi] = (1, -1) = 1-j = w_3$$



b) Calcule el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas del complejo $z = -64j$

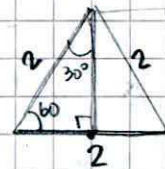
$$w^6 = -64j = [64; \frac{3\pi}{2}]$$

Un hexágono está formado por 6 triángulos equiláteros cuyos lados valen r

Halle r .

$$w_0 = [\sqrt[6]{64}; \frac{3\pi}{2}] = [2; \frac{3\pi}{2}] \rightarrow r = 2$$

área del triángulo equilátero $r = 2$



$$30^\circ \equiv \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{b \times h}{2} = \dots$$

$$h = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \rightarrow A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\Delta} = \sqrt{3}$$

$$A_{\text{Hex}} = 6A_{\Delta} = 6\sqrt{3}$$

16) Indique la validez de las sig. afirmaciones, demostrándolas o refutando con un contraejemplo:

a) Si w_k es una raíz primitiva de la unidad, entonces k es primo F

$z^m = 1$; w_k es primitiva si $(k, m) = 1$, si m es primo, k puede ser no primo y son coprimos entre sí

$m = 7$, raíces primitivas:

w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 y w_6 y 4, 6 no son primos

b) Si m es impar entonces w_2 es una raíz primitiva de orden m de la unidad

V m impar $\Rightarrow m = 2k+1$, $(2k+1, 2) = 1 \forall k \in \mathbb{Z}$

c) Las raíces cuartas de todo complejo con argumento π , son dos pares de complejos conjugados

V $z^4 = [a; \pi] \rightarrow \left. \begin{array}{l} w_0 = [\sqrt[4]{a}; \pi/4] \\ w_1 = [\sqrt[4]{a}; 3\pi/4] \\ w_2 = [\sqrt[4]{a}; 5\pi/4] \\ w_3 = [\sqrt[4]{a}; 7\pi/4] \end{array} \right\} \begin{array}{l} w_0 = \overline{w_3} \\ w_1 = \overline{w_2} \end{array}$ ✓

d) Existen 8 raíces primitivas de la unidad de orden 30.

$m = 30 \rightarrow$ Raíces primitivas: $w_1; w_7; w_{11}; w_{13}; w_{17}; w_{19}; w_{23}; w_{29}$

V. Son 8

Parte 4: Logaritmo natural y exponenciales complejas

17) Halla $\ln(z)$ para:

$$\boxed{\ln(z) = \ln(|z|) + j(\theta + 2k\pi)}$$

a) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}j$

$$\boxed{\ln(z) = \ln(\sqrt{3} - \sqrt{3}j) = \ln[\sqrt{6}; \frac{7}{4}\pi] = \ln(\sqrt{6}) + j(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi)}$$

b) $z = -4$

$$\ln(z) = \ln(-4) = \ln[4; \pi] \rightarrow \boxed{\ln(z) = \ln(4) + j(\pi + 2k\pi)}$$

c) $z = -e^{j\pi}$

$$-e^{j\pi} = (-1) \cdot 1 \cdot e^{j\pi} = -1 [1; \pi] = -1 \cdot (-1) = 1$$



$$\ln(z) = \ln(1) = \ln[1; 0] \rightarrow \ln(z) = \ln(1) + j(0 + 2k\pi)$$

$$\boxed{\ln(z) = 2k\pi j}$$

d) $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})$

$$z = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]$$

$$\ln(z) = \ln[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}] \rightarrow \boxed{\ln(z) = \ln(\sqrt{2}) + j(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

e) $z = e^{-\frac{3}{2}j\pi}$

$$z = [1; -\frac{3}{2}\pi]$$

$$\ln(z) = \ln[1; -\frac{3}{2}\pi] \rightarrow \ln(z) = \ln(1) + j(-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$$

$$\boxed{\ln(z) = (-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)j}$$

18) Sea $z = (k+4, \frac{\sqrt{3}}{2})$ Halle el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que $\ln(z)$ sea imaginario puro.

$$z = \begin{matrix} \text{Re} & \text{Im} \\ (k+4, \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{matrix} = \left[\underbrace{\sqrt{(k+4)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}_{|z|}, \varphi \right]$$

$$\ln(z) = \ln(|z|) + j(\varphi + 2k\pi)$$

0 para que sea imaginario puro.

$$\rightarrow \sqrt{(k+4)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \rightarrow (k+4)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$k^2 + 8k + 16 + \frac{3}{4} = 1 \rightarrow k^2 + 8k + \frac{63}{4} = 0$$

$$\begin{cases} k_1 = -7/2 \\ k_2 = -9/2 \end{cases}$$

19) Halle el valor principal de z que verifique las siguientes igualdades:

a) $(1+j)^z = 1$

$$\ln(1+j)^z = \ln(1) \rightarrow z \ln(1+j) = 0 \quad ; \quad z = x + yj$$

$$\bullet \ln(1+j) = \ln(\sqrt{2}) + j \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow z \ln(1+j) = 0 \rightarrow (x + yj) \left(\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} j \right) = 0$$

$$\begin{cases} x \ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} y = 0 \\ y \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} x = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{Parte real}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \ln \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} y \\ y \ln \sqrt{2} = -\frac{\pi}{4} x \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi/4 y}{\ln(\sqrt{2})}$$

$$\rightarrow x = \frac{y \ln \sqrt{2}}{-\pi/4}$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{\pi/4 y}{\ln \sqrt{2}} = -\frac{y \ln \sqrt{2}}{\pi/4} \\ \text{si } y=0 \rightarrow x=0 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{si } y \neq 0 \rightarrow \frac{(\pi/4)^2}{\ln \sqrt{2}} = -(\ln \sqrt{2})^2$$

absurdo

$$\rightarrow x=0 \rightarrow y=0$$

$$\boxed{z=0}$$

$$b) \left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2} \right)^2 = j$$

$$\ln \left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \ln(j)$$

$$\bullet z \ln \left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2} \right) = z \cdot \ln \left[1; \frac{\pi}{3} \right] = z \left(\ln(1) + \frac{\pi}{3} j \right) = (x+yj) \left(\frac{\pi}{3} j \right) =$$

$$= \boxed{-y \frac{\pi}{3} + x \frac{\pi}{3} j = z \ln \left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2} \right)}$$

$$\bullet \ln(j) = \ln(1) + \frac{\pi}{2} j = \boxed{\frac{\pi}{2} j = \ln(j)}$$

$$\rightarrow -y \frac{\pi}{3} + x \frac{\pi}{3} j = \frac{\pi}{2} j \rightarrow \begin{cases} -y \frac{\pi}{3} = 0 \rightarrow y = 0 \\ x \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 3/2 \end{cases}$$

$$\boxed{z = 3/2}$$

$$c) z = \sqrt[1+j]{j}$$

$$z = j^{\frac{1}{1+j}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1+j} = \frac{1}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-j}{2} \rightarrow \boxed{z = j^{\frac{1-j}{2}}}$$

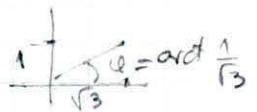
$$\rightarrow \ln(z) = \ln \left(j^{\frac{1-j}{2}} \right) = \frac{1-j}{2} \ln(j) = \frac{1-j}{2} \left(\ln(1) + j \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{1-j}{2} \left(j \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} j \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} j$$

$$\ln(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} j \rightarrow \underbrace{e^{\ln(z)}}_z = e^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} j}$$

$$z = e^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} j} = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{\frac{\pi}{4} j} = \boxed{\left[e^{\frac{\pi}{4}}; \frac{\pi}{4} \right] = e^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j \right) = z}$$

d) Halla módulo de $z = (\sqrt{3} + j)^{5j}$



$$\ln(z) = \ln(\sqrt{3} + j)^{5j} = 5j \ln(\sqrt{3} + j) = 5j \cdot (\ln(2) + j\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6} + \ln(2)5j$$

$$\ln(z) = -\frac{\pi}{6} + \ln(2)5j \rightarrow z = e^{-\frac{\pi}{6} + \ln(2)5j} = e^{-\frac{\pi}{6}} \cdot e^{\ln(2)5j}$$

$$z = e^{-\frac{\pi}{6}} (\cos(\ln(2)5) + j \sin(\ln(2)5)) \rightarrow \boxed{|z| = e^{-\frac{\pi}{6}}}$$

e) $z^{\sqrt{1-\sqrt{3}j}} = \frac{1+\sqrt{3}j}{2j}$

$$\bullet \frac{1-\sqrt{3}j}{2} = \left[1; \frac{5}{3}\pi\right]$$

$$\bullet \frac{1+\sqrt{3}j}{2j} = \frac{\left[2; \frac{1}{3}\pi\right]}{\left[2; \frac{\pi}{2}\right]} = \left[\frac{2}{2}; \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right] = \left[1; -\frac{\pi}{6}\right] = \left[1; \frac{11}{6}\pi\right]$$

$$\rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{3}j}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}j}{2j} \rightarrow \ln\left(\frac{1-\sqrt{3}j}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\sqrt{3}j}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}j}{2j}\right)$$

$$\rightarrow \ln\left[1; \frac{5}{3}\pi\right] = 2 \ln\left[1; \frac{11}{6}\pi\right] \rightarrow \overset{0}{\ln(1)} + j\frac{5}{3}\pi = 2\left(\overset{0}{\ln(1)} + j\frac{11}{6}\pi\right)$$

$$\rightarrow z = \frac{j\frac{5}{3}\pi}{j\frac{11}{6}\pi} = \frac{10}{11} \rightarrow \boxed{z = \frac{10}{11}} \checkmark$$

f) $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{5j}$

$$z = \left[1; \frac{3}{4}\pi\right]^{5j} \rightarrow \ln(z) = \ln\left(\left[1; \frac{3}{4}\pi\right]^{5j}\right) = 5j \ln\left[1; \frac{3}{4}\pi\right] =$$

$$= 5j \left(\overset{0}{\ln(1)} + j\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{15}{4}\pi$$

$$\ln(z) = -\frac{15}{4}\pi \rightarrow e^{\ln(z)} = \boxed{e^{-\frac{15}{4}\pi} = z} \checkmark$$

Parte 5: Ejercicios combinados

(20) Halle, analíticamente, y grafique los conjuntos (considere $z = x + jy$)

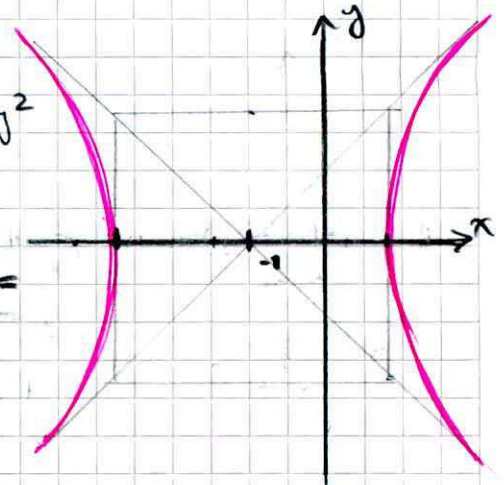
$$A = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z^2) + z + \bar{z} = |1 + \sqrt{2}j|^2\}$$

⊕ $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyj \rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$

⊙ $|1 + \sqrt{2}j|^2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}^2 = 3$

→ $\operatorname{Re}(z^2) + z + \bar{z} \stackrel{\text{⊕}}{=} x^2 - y^2 + x + yj + x - yj \stackrel{\text{⊙}}{=} x^2 - y^2 + 2x = 3$

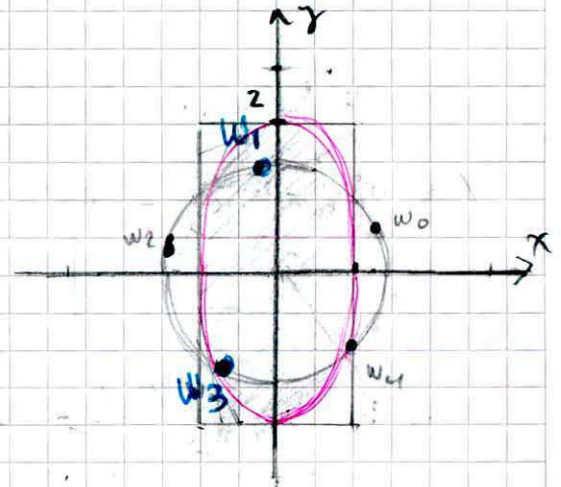
→ $(x+1)^2 - y^2 = 3 \quad \text{:A}$



$$B = \{z \in \mathbb{C} / z^5 + 4 - 4j = 0 \wedge 5|z|^2 + 3\operatorname{Re}(z^2) \leq 8\}$$

• $z^5 = -4 + 4j = [4\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi]$

$w_i = \left[\sqrt[5]{4\sqrt{2}}; \frac{\frac{3}{4}\pi + 8k\pi}{20} \right] \quad i \in \mathbb{Z} [0; 4]$
 $= \left[\sqrt{2}; \frac{3}{20}\pi + \frac{8k\pi}{20} \right]$



• $|z|^2 = x^2 + y^2$

$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$

→ $5|z|^2 + 3\operatorname{Re}(z^2) \leq 8$

$5(x^2 + y^2) + 3(x^2 - y^2) = 5x^2 + 5y^2 + 3x^2 - 3y^2 = 8x^2 + 2y^2 \leq 8$

$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$

↑ $a = 1$
 $b = 2$

$w_1 = -0,22 + 1,40j \in B$

$w_3 = -0,64 - 1,26j \in B$

$w_4 = 1 - j \notin B$

$B = \{w_1; w_3\}$

$$C = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^2 - (6-2j)z + 11-10j = 0 \wedge |z-3| \leq 2 \}$$

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyj$$

$$\bullet (6-2j)z = (6-2j)(x+yj) = 6x + 6yj - 2xj + 2j = (6x+2j) + (6y-2x)j$$

$$\bullet |z-3| \leq 2 \rightarrow |x+yj-3| \leq 2 \rightarrow |(x-3) + yj| \leq 2$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \leq 2 \rightarrow \boxed{(x-3)^2 + y^2 \leq 4}$$

$$\rightarrow z^2 - (6-2j)z + 11-10j =$$

$$= (x^2 - y^2) + 2xyj - (6x+2j) - (6y-2x)j + 11-10j =$$

$$= \underbrace{(x^2 - y^2 - 6x - 2j + 11)}_0 + \underbrace{(2xy - 6y + 2x - 10)}_0 j = 0$$

\rightarrow

$$x^2 - y^2 - 6x - 2j + 11 = 0 = (x-3)^2 - 9 - (y+1)^2 + 1 + 11 = 0$$

$$\boxed{(x-3)^2 - (y+1)^2 = -3}$$

$$\rightarrow 2xy - 6y + 2x - 10 = 0 = xy - 3y + x - 5 = 0 = y(x-3) + x-5$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{5-x}{x-3}}$$

$$C: \boxed{z = 4+j}$$

oTRA forma más simple:

$$\bullet |z-3| \leq 2 \rightarrow \boxed{(x-3)^2 + y^2 \leq 4}$$

$$\bullet z^2 - (6-2j)z + 11-10j = 0 \rightarrow a=1; b=-(6-2j); c=11-10j$$

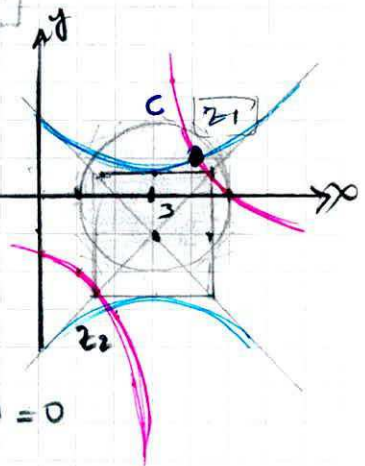
$$\rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6-2j \pm \sqrt{(6-2j)^2 - 4 \cdot (11-10j)}}{2}$$

$$= 3-j + \frac{\sqrt{32-24j-44+40j}}{2} = 3-j + \frac{\sqrt{-12+16j}}{2} = 3-j + \frac{w_{1,2}}{2} \quad (*)$$

$$\bullet w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{20-12}{2}} + \sqrt{\frac{20+12}{2}} j \begin{cases} w_1 = 2+4j \\ w_2 = -2-4j \end{cases}$$

$$\bullet z_1 = 3-j + \frac{w_1}{2} = 3-j + 1+2j = 4+j = z_1$$

$$z_2 = 3-j + \frac{w_2}{2} = 3-j - 1-2j = 2-3j = z_2$$



20. D

$$D = \{z \in \mathbb{C} / |z-2|^2 + 1 \geq 0,5 [\operatorname{Im}(z-\bar{z})]^2\}$$

- $|z-2|^2 + 1 = |x+jy-2|^2 + 1 = (x-2)^2 + y^2 + 1$

- $z-\bar{z} = x+jy - (x-jy) = x+jy - x+jy = 2yj$

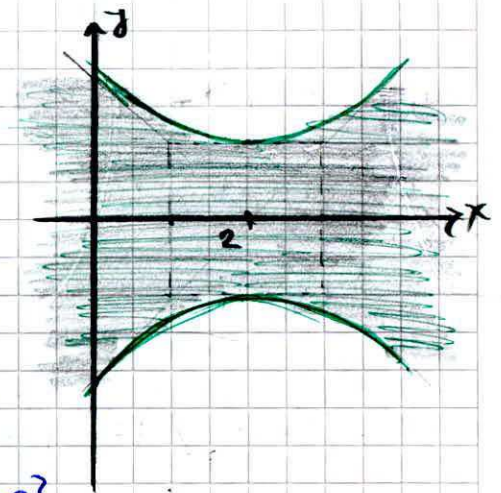
$$\operatorname{Im}(z-\bar{z}) = \operatorname{Im}(2yj) = 2y$$

$$\rightarrow |z-2|^2 + 1 \geq 0,5 [\operatorname{Im}(z-\bar{z})]^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 + 1 \geq 0,5 (2y)^2 = 0,5 \times 4y^2 = 2y^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 + 1 - 2y^2 \geq 0$$

$$\boxed{(x-2)^2 - y^2 \geq -1} = D$$



$$E = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 3 \wedge 5|z|^2 - 4\operatorname{Re}(z^2) \geq 9\}$$

- $|z| \leq 3 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 \leq 3^2}$
disco centro $\bar{0}$ $r=3$

- $5|z|^2 = 5(x^2 + y^2)$

- $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$

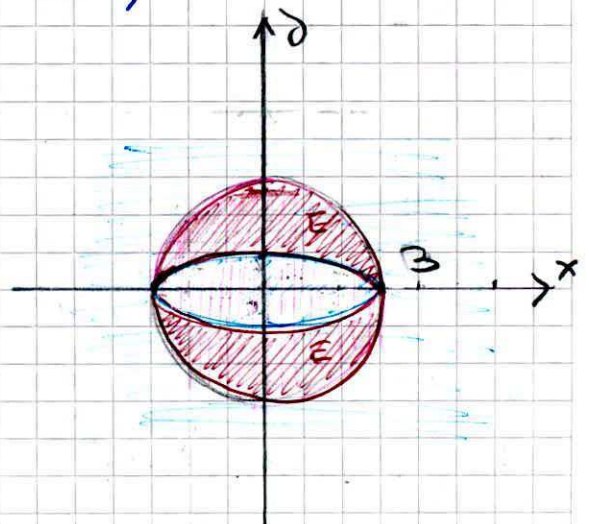
$$\rightarrow 5|z|^2 - 4\operatorname{Re}(z^2) \geq 9$$

$$5x^2 + 5y^2 - 4x^2 + 4y^2 \geq 9$$

$$x^2 + 9y^2 \geq 9 \rightsquigarrow \boxed{\frac{x^2}{9} + y^2 \geq 1}$$

elipse centro $\bar{0}$, $a=3$
 $b=1$

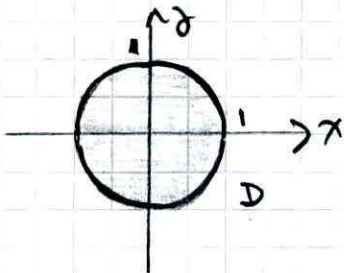
$$\boxed{E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{x^2}{9} + y^2 \geq 1\}}$$



2) Grafique en el plano complejo cada uno de los sig. conjuntos.
 Halle analíticamente y grafique en otro par de ejes la imagen de la función compleja $f(z) = \frac{1}{z}$ con dominio en cada uno de los conjuntos D.

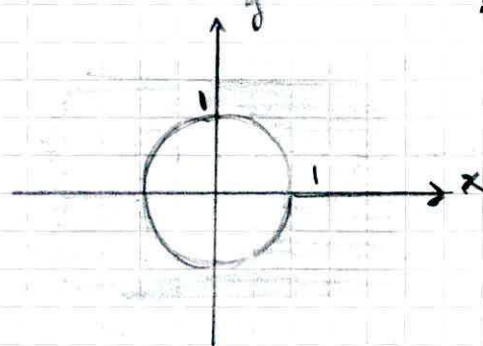
a) $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$

$$|z| \leq 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$



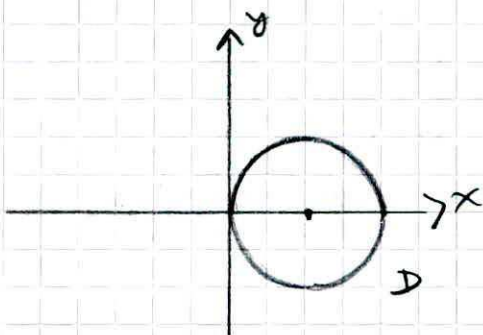
$$f(z) = \frac{1}{z} = z^{-1} \rightarrow \text{inverso de } z$$

$$f(z) = \frac{1}{x + jy} = \frac{1}{(x + jy)(x - jy)} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = x - jy$$



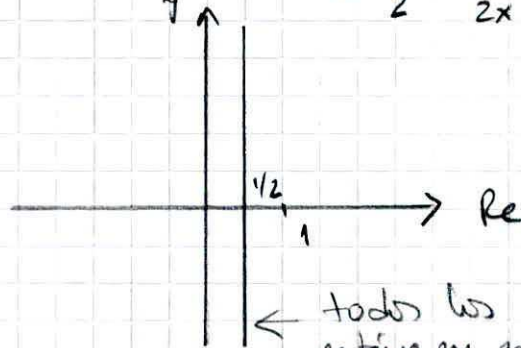
b) $D = \{z \in \mathbb{C} / |z-1| = 1\}$

$$|z-1| = 1 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$



$$f(z) = z^{-1} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x - jy}{2x} = \frac{x}{2x} - \frac{jy}{2x}$$

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{2} - \frac{y}{2x}j$$



← todos los complejos de $f(z)$ están en esta recta pues todos tienen como constante su parte real = $\frac{1}{2}$

- 1º Fasores en polares
- 2º Fasores a binómica
- 3º suma fasores en binómica
- 4º pasar suma a polar

5º pasar suma $f + g = \frac{a \cos(\omega t + \dots)}{\text{mód.}} \dots \frac{\dots}{\omega t}$

Mat. Sep.

TP 1

Parte 6: Superposición de señales senoidales de igual frecuencia.

22) Dadas las funciones f y g obtenga la función $f+g$ utilizando fasores:

a) $f(t) = 5 \cos(2t - \frac{\pi}{3})$ y $g(t) = 8 \cos(2t + \frac{\pi}{6})$

$F = [5; -\frac{\pi}{3}]$

$G = [8; \frac{\pi}{6}]$

$F = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}j$

$G = 4\sqrt{3} + 4j$

$F+G = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}j + 4\sqrt{3} + 4j = \frac{5+8\sqrt{3}}{2} + \frac{8-5\sqrt{3}}{2}j$

$F+G = [189; -0,035] \rightarrow \boxed{f+g(t) = \sqrt{189} \cos(2t - 0,035)}$

b) $f(t) = \sin(5t - \frac{\pi}{2})$

$g(t) = \sin(5t + \frac{\pi}{3})$

$f(t) = \cos(5t - \pi)$

$g(t) = \cos(5t - \frac{\pi}{6})$

$F = [1; -\pi]$

$G = [1; -\frac{\pi}{6}]$

$F = -1$

$G = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$

$F+G = (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2}j = [0,5176; \frac{5}{12}\pi]$

$\boxed{f+g(t) = 0,5176 \cos(5t + \frac{5}{12}\pi) = 0,5176 \sin(5t - \frac{\pi}{12})}$

c) $f(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{4})$

$g(t) = \sin(2t - \frac{\pi}{3})$

$f(t) = \cos(2t - \frac{\pi}{4})$

$g(t) = \cos(2t - \frac{5}{6}\pi)$

$F = [1; -\frac{\pi}{4}]$

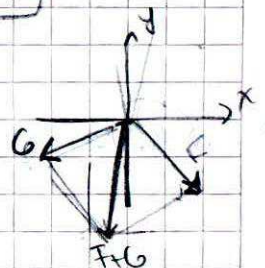
$G = [1; -\frac{5}{6}\pi]$

$F = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$

$G = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$

$F+G = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2})j = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}j = 0,159 - 1,207j$

$F+G = [1,217; 4,58]$



3º cuadrante
en 1º c $\rightarrow \alpha = 1,44$
3º c $\rightarrow +\pi$

$\boxed{f+g(t) = 1,217 \cos(2t + 4,58) = 1,217 \sin(2t - 0,13)}$

$4,58 + \frac{\pi}{2} = 6,15 - 2\pi = -0,13$

Sylvius

$$d) f(t) = 4 \cos(3t)$$

$$g(t) = 6 \sin(3t)$$

$$F(t) = 4 \cos(3t)$$

$$g(t) = 6 \cos(3t - \frac{\pi}{2})$$

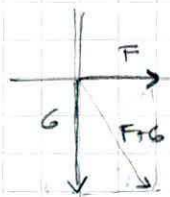
$$F = [4; 0]$$

$$G = [6; -\frac{\pi}{2}]$$

$$F = 4$$

$$G = -6j$$

$$F + G = 4 - 6j = [2\sqrt{3}; -0,983]$$



$$(f+g)(t) = 2\sqrt{3} \cos(3t - 0,983) \quad \checkmark$$

$$e) f(t) = 4 \cos(3t + \frac{\pi}{4})$$

$$g(t) = 6 \cos(3t - \frac{\pi}{3})$$

$$F = [4; \frac{\pi}{4}]$$

$$G = [6; -\frac{\pi}{3}]$$

$$F = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j$$

$$G = 3 - 3\sqrt{3}j$$

$$F + G = (2\sqrt{2} + 3) + (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})j = [6,29; -0,39]$$

$$(f+g)(t) = 6,29 \cos(3t - 0,39) \quad \checkmark$$

23) Analice la validez de las sig. proposiciones, justificando:

a) La suma de dos funciones senoidales es siempre una función senoidal.

\boxed{F} . Si tienen distinta frecuencia esto puede no ocurrir.

b) Si $f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$ y $f_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \Rightarrow$ la amplitud de la onda $f_1(t) + f_2(t)$ no puede ser menor que A_1 ni menor que A_2

Pregunta si: $N[A_{1+2} < A_1 \wedge A_{1+2} < A_2]$ pero es \boxed{F} pues si el ángulo entre F_1 y F_2 (fasores de f_1 y f_2) es obtuso $\rightarrow F_1 + F_2$ es menor que F_1 y menor que F_2



c) La suma de dos funciones senoidales de la misma frecuencia y amplitud con diferencia de fase $0 < \phi < \pi/2$ tiene siempre mayor amplitud a la de las funciones dadas

\boxed{V}

24) Indique un valor de $\varphi < \pi$ tal que la amplitud de $f(t) = A \cos(\omega t) + A \cos(\omega t + \varphi)$ sea la misma A

$$f(t) = A \cos(\omega t) + A \cos(\omega t + \varphi)$$

tomamos: $f_1(t) = A \cos(\omega t)$ y $f_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$F_1 = [A; 0] = A$$

$$F_2 = [A; \varphi] = A \cos(\varphi) + A \sin(\varphi) j$$

$$F_1 + F_2 = \left(\frac{A(1 + \cos(\varphi))}{A(1 + \cos(\varphi))} + A \sin(\varphi) j \right)$$

$$F_1 + F_2 = \left[\sqrt{(A + A \cos(\varphi))^2 + (A \sin(\varphi))^2}; \arctg \left(\frac{A \sin(\varphi)}{A(1 + \cos(\varphi))} \right) \right] =$$

$$= \left[\sqrt{A^2 + 2A^2 \cos(\varphi) + A^2 \cos^2(\varphi) + A^2 \sin^2(\varphi)}; \arctg \left(\frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} \right) \right] =$$

$$= \left[A \sqrt{1 + 2 \cos(\varphi) + \underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_1}; \arctg \left(\frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} \right) \right] =$$

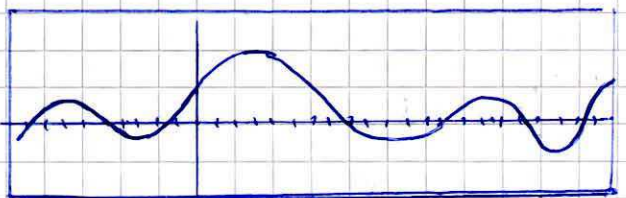
$$= \left[A \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi)}; \arctg \left(\frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} \right) \right]$$

Quiero hallar un φ tal que $A \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi)} = A \rightarrow \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi)} = 1$

$$\rightarrow 2 + 2 \cos(\varphi) = 1 \rightarrow 2 \cos(\varphi) = -1 \rightarrow \cos(\varphi) = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{2}{3} \pi}$$

25) La sig. gráfica corresponde a una función que es suma de dos armónicas simples.

Indique si se trata de dos funciones de la misma frecuencia o de distintas frecuencias. Justifique.

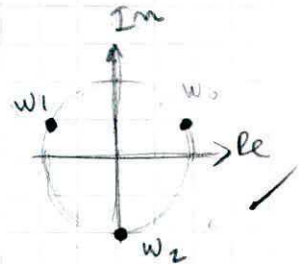


Se trata de dos funciones con distinta frecuencia pues si se trata de la misma, la suma tiene una amplitud constante

26) Marcar la ÚNICA respuesta correcta de cada ítem:

1) Sean w_0, w_1, w_2 las raíces cúbicas de $z = 8j$, entonces es FALSO:

- a) w_2 es imaginaria pura ✓
- b) ninguna es real ✓
- c) hay dos complejos conjugados ✓
- d) una está en el 1º cuadrante ✓



$$z = w^3 = 8j = [8; \frac{\pi}{2}] \rightarrow w_0 = [2; \frac{\pi}{6}] \quad w_1 = [2; \frac{5\pi}{6}] \quad w_2 = [2; \frac{3}{2}\pi] \text{ es imag pura}$$

2) Sabiendo que w es una de las raíces cuartas de $z = -7 + 24j$, entonces se puede asegurar que =

- a) w no es imaginaria pura ✓
- b) $|w| = 5$
- c) la conjugada también es raíz cuarta
- d) $w = 1 - 2j$

$$z = [25; -1,29] \rightarrow w_k = [\sqrt[4]{25}; \frac{-1,29}{4} + \frac{k\pi}{2}]$$

3) El valor ppal. del complejo $z = \left(\frac{4}{5} + j\frac{3}{5}\right)^{5j}$ es:

- a) imaginario puro
- b) real ✓
- c) complejo no real ni imaginario puro

$$z = [1; 0,644]^{5j} \rightarrow \ln(z) = 5j \ln [1; 0,644] = 5j \cdot 0,644j = -3,22 \quad \begin{matrix} \ln(1) = 0 \\ \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

4) Sea z_1 la raíz de mayor módulo de la ecuación $z^2 + 2z + 3 + j(zz + 6) = 0$ y z_2 la de menor módulo, entonces:

- a) z_1 es imaginaria pura ✓
- b) $z_2 \in I$ cuadrante
- c) $\bar{z}_1 = z_2$
- d) \dot{z}_2 es real

$$z^2 + 2z + 3 + (2z + 6)j = z^2 + 2z + 3 + 2zj + 6j =$$

$$= z^2 + (2 + 2j)z + (3 + 6j) = 0$$

$$\rightarrow a = 1 ; b = 2 + 2j ; c = 3 + 6j$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2+2j) \pm \sqrt{(2+2j)^2 - 4(3+6j)}}{2} =$$

$$= (-1-j) \pm \frac{\sqrt{8j - 12 - 24j}}{2} = (-1-j) \pm \frac{\sqrt{-12 - 16j}}{2} = -(1+j) \pm \frac{w_{1,2}}{2} \quad \textcircled{I}$$

$$w = \sqrt{-12 - 16j} \quad x = -12, |w| = 20 \rightarrow w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{20 + (-12)}{2}} + \sqrt{\frac{20 - (-12)}{2}} j$$

$$w_1 = 2 - 4j \quad \textcircled{I} \rightarrow z_1 = -1-j + \frac{2-4j}{2} = -1-j + 1-2j = \boxed{-3j = z_1}$$

$$w_2 = -2 + 4j \rightarrow z_2 = -1-j + \frac{-2+4j}{2} = -1-j + -1+2j = \boxed{-2+j = z_2}$$

$$|z_1| = 3 \quad |z_2| = \sqrt{5} \quad |z_1| > |z_2|, \quad z^2 = 4 - 1 - 4j$$

5] Los complejos que verifican la ecuación $z^2 = 2 \cdot \bar{z}$ son:

- a) dos complejos conjugados y dos reales ✓
- b) dos reales y dos imaginarios puros
- c) sólo dos complejos conjugados
- d) infinitas soluciones

$$z^2 = 2\bar{z} \rightarrow (x + jy)^2 = 2(x - jy) \rightarrow x^2 - y^2 + 2xyj = 2x - 2yj$$

$$\rightarrow (x^2 - y^2 - 2x) + (2xy + 2y)j = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x-1)^2 - y^2 = 1 \\ 2xy + 2y = 0 \rightarrow y(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 - y^2 = 1: \text{ si } y=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \boxed{z=2}$$

$$\text{ si } y \neq 0 \rightarrow x=-1 \rightarrow (-2)^2 - y^2 = 1 \rightarrow 3 = y^2 \rightarrow y = \begin{matrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{matrix}$$

z posibles: $z = 2$

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}j \quad \wedge \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}j$$

6] La ecuación $z^2 - 3z + 3 - j = 0$ tiene como solución:

- a) dos complejos conjugados
- b) dos imaginarios puros.
- c) un real y un complejo no real
- d) ninguna de las anteriores**

$$z^2 - 3z + 3 - j = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 3 - j$$

Hallo las raíces: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 + 4j}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3 + 4j}}{2}$

tomando $w^2 = -3 + 4j \rightarrow w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5-3}{2}} \pm j \sqrt{\frac{5+3}{2}}$ $w_1 = 1 + 2j$
 $w_2 = -1 - 2j$

$|w| = 5$; $x = -3$

$$z_1 = \frac{3 + w_1}{2} = \frac{3 + 1 + 2j}{2} = \frac{4 + 2j}{2} \rightarrow \boxed{z_1 = 2 + j}$$

$$z_2 = \frac{3 + w_2}{2} = \frac{3 + (-1 - 2j)}{2} = \frac{2 - 2j}{2} \rightarrow \boxed{z_2 = 1 - j}$$

7] Dada la ecuación $z^4 + 7 + 24j = 0$:

- a) sus raíces son dos pares de complejos conjugados
- b) dos de las raíces son imaginarios puros.
- c) una raíz es $-2 + j = z_2$**
- d) ninguna de las anteriores

$$z^4 = -7 - 24j = [25; 4,43]$$

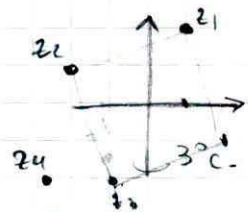
$$z_i = \left[\sqrt[4]{25}; \frac{4,43}{4} + \frac{j\pi}{2} \right] \quad i \in [0, 3]$$

$$z_1 = \left[\sqrt[4]{25}; 1,107 \right] = (1, 2)$$

$$z_2 = \left[\sqrt{5}; 2,68 \right] = (-2, 1)$$

$$z_3 = \left[\sqrt{5}; 4,25 \right] = (-1, -2)$$

$$z_4 = \left[\sqrt{5}; 5,82 \right] = (2, -1)$$



1, 2

8] Sabiendo que $(f+g)(t) = 2\sqrt{3} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ y $f(t) = \sqrt{3} \cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)$ entonces $g(t)$ es:

- a) $g(t) = 3 \cos\left(5t + \frac{2}{3}\pi\right)$ ✓
- b) $g(t) = \sqrt{3} \cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$
- c) $g(t) = \sqrt{3} \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$
- d) $g(t) = 0$

$$F = \left[\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right] = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$\text{con a): } G = \left[3; \frac{2}{3}\pi\right] = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j \rightarrow F+G = 2\sqrt{3}j = \left[2\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\rightarrow (f+g)(t) = 2\sqrt{3} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

9] Dada una ecuación polinómica de grado 5 con todos los coeficientes reales, se puede asegurar que:

- a) tiene por lo menos una raíz real ✓
- b) no todas sus raíces son reales
- c) hay por lo menos un par de raíces complejas conjugadas
- d) ninguna de las anteriores

10] El fasor asociado a la suma de las funciones $f(t) = \sqrt{3} \cos\left(\omega t + \frac{k\pi}{6}\right)$ y $g(t) = \sqrt{3} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ es imaginario puro si:

a) $k=1$

b) $k=3$

c) $k=5$ ✓

d) ninguna de las anteriores

$$F = \left[\sqrt{3}; \frac{k\pi}{6}\right] = \sqrt{3} \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)j$$

$$G = \left[\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right] = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$F+G = \underbrace{\left(\sqrt{3} \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) + \frac{3}{2}\right)}_0 + \left[\left(\sqrt{3} \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)j\right] \rightarrow \sqrt{3} \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2} \rightarrow k=5$$

11) Las dos soluciones de la ecuación: $z^2 = 8 + 2\bar{z}$ pertenecen al conjunto:

- a) $\{(a,b) \in \mathbb{C} \mid a \neq 0 \wedge b = 0\}$
 b) $\{(a,b) \in \mathbb{C} \mid a > 0 \wedge b = 0\}$
 c) $\{(a,b) \in \mathbb{C} \mid a > 0 \wedge b \neq 0\}$
 d) $\{(a,b) \in \mathbb{C} \mid a = 2b \wedge b \neq 0\}$

$$z = a + bj \rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abj \quad \bar{z} = a - bj$$

$$\rightarrow a^2 - b^2 + 2abj = 8 + 2a - 2bj \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 + 2a \\ 2abj = -2bj \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ \vee b = 0 \end{matrix}$$

• Si $b = 0 \rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \rightarrow a = 4$ $a = -2 \rightarrow b = 0 \rightarrow a \neq 0$

• Si $b \neq 0 \rightarrow a = -1 \therefore (-1)^2 - b^2 = 8 + 2(-1) \rightarrow b^2 = -5 \rightarrow b \neq 0 \rightarrow a < 0$

12) Los valores de m y n reales tales que la ecuación $z^2 - mz + n = 0$ tenga como una de sus raíces a $z_1 = 2 - 5j$ son:

- a) $m = 4 \wedge n = 6$
b) $m = 4 \wedge n = 29$
 c) $m = 0 \wedge n = 29$
 d) ninguna de las anteriores

coef del polinomio $\in \mathbb{R} \therefore \exists \bar{z}_1$ una raíz, también es raíz su conjugada

$$z_1 = 2 - 5j \rightarrow z_2 = 2 + 5j$$

$$z^2 - mz + n = 0 \rightarrow a = 1 \quad ; \quad b = -m \quad ; \quad c = n$$

$$-\frac{b}{a} = z_1 + z_2 = 2 - 5j + 2 + 5j = 4 = -b = m \rightarrow \boxed{m = 4}$$

$$+\frac{c}{a} = z_1 z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = 2^2 + 5^2 = 29 = c \rightarrow \boxed{m = 29}$$

13) El valor pnal de $\ln(z)$ siendo $z = -aj$ con $a \in \mathbb{R}^+$ siempre tiene:

- a) la misma parte real
- b) la misma parte imaginaria ✓
- c) el mismo módulo
- d) ninguno de los anteriores

$$\ln(z) = \ln(-aj) = \ln\left[a; \frac{3}{2}\pi\right] = \ln(a) + \frac{3}{2}\pi j$$

14) El valor pnal de $\ln(z)$ siendo $z = \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} j$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ siempre tiene:

- a) la misma parte real
- b) la misma parte imaginaria
- c) el mismo módulo
- d) ninguno de los anteriores

$$\ln\left(\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} j\right) = \ln\left[1; \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\right]$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{a^2-1}{a^2}} = \sqrt{\frac{1+a^2-1}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2}} = 1 = |z|$$

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2}$$

RESPUESTAS EJERCICIOS DE COMPLEJOS:

Ej. 1:

- a) $10 - 2j$ b) $24 - 7j$ c) $68 - 2j$ d) $-19 + 4j$ e) $-1 + 0.5j$

Ej. 2:

- a) $x = 4$ $y = 3/5$ b) $(x = 5 \wedge y = -1) \vee (x = 6 \wedge y = 0)$

Ej. 3:

- a) $\cos(2\alpha) + j \sin(2\alpha)$ b) $\frac{2ac + 2bd}{c^2 + d^2}$

Ej. 4:

- a) $(8 + 2\sqrt{3}) + j(2 + 3\sqrt{3})$ b) $-64j$

Ej. 5:

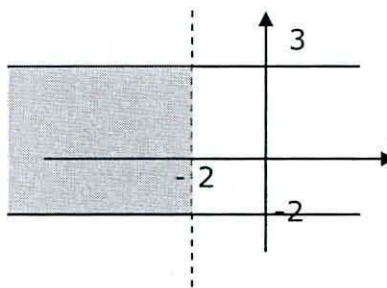
- a) $z = (-1/2, \sqrt{3}/2) \vee z = (-1/2, -\sqrt{3}/2) \vee z = (0,0) \vee z = (1,0)$
 b) todos los complejos de módulo unitario, o sea $z = x + jy$ con $x^2 + y^2 = 1$

Ej. 6:

$x = 2 \vee x = -2$ entonces $z = -j \vee z = j$

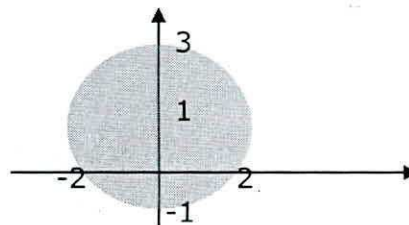
Ej. 7:

- a) $-2 \leq y \leq 3 \wedge x < -2$



- b) $x^2 + (y-1)^2 < 2^2$

Círculo con Centro en $(0,1)$ y radio 2



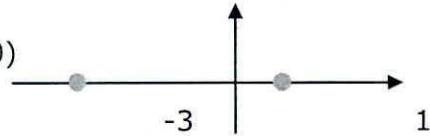
c) $z(\bar{z} + 2) = 3 \Rightarrow (x + yj)(x - yj + 2) = 3$

$\Rightarrow x^2 - xyj + 2x + xyj + y^2 + 2yj = 3 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2yj = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 = 3 \wedge 2y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge y = 0$

$\Rightarrow (x = 1 \vee x = -3) \wedge y = 0$

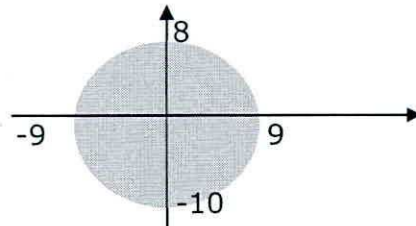
\Rightarrow Son dos puntos: $z = (1,0) \vee z = (-3,0)$



d) $|-j + \bar{z}| \leq 9 \Rightarrow |-j + x - yj| \leq 9$

$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 \leq 81$

Círculo con Centro en (0, -1) y radio 9

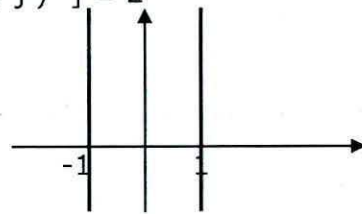


e) $|z|^2 + \text{Re}(z^2) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + \text{Re}[(x + yj)^2] = 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + \text{Re}(x^2 + 2xyj - y^2) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$



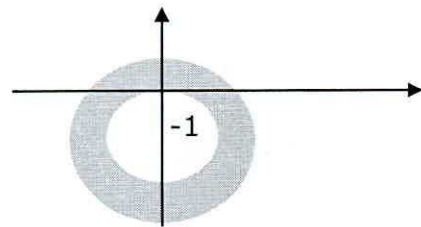
Es un par de rectas paralelas

f) $1 < |z + j| \leq 2 \Rightarrow 1 < |x + yj + j| \leq 2$

$\Rightarrow 1 < x^2 + (y+1)^2 \leq 4$

Anillo circular con Centro en (0, -1)

radio menor abierto 1 y radio mayor 2

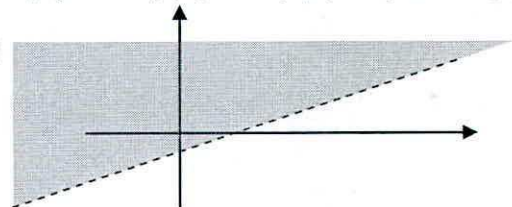


g) $\text{Re}[(1 + 3j)z - (1 + 4j)] < 0 \Rightarrow \text{Re}[(1 + 3j)(x + yj) - (1 + 4j)] < 0$

$\Rightarrow \text{Re}[x + yj + 3jx - 3y - 1 - 4j] < 0$

$\Rightarrow x - 3y - 1 < 0 \Rightarrow x - 3y < 1$

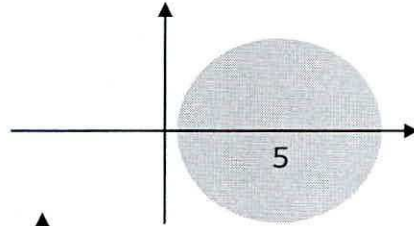
Semiplano



h) $\left| \frac{z-5}{4+j} \right| < 1 \Rightarrow \frac{|x+jy-5|}{|4+j|} < 1 \Rightarrow |x+jy-5| < |4+j|$

$\Rightarrow (x-5)^2 + y^2 < 17$

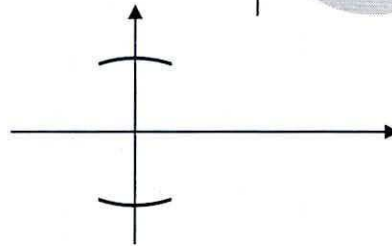
Círculo abierto con centro en (5,0) y radio $\sqrt{17}$



i) $-\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < \frac{1}{2} \wedge |z| = 2$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \wedge \sqrt{x^2+y^2} = 2$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \wedge x^2 + y^2 = 4$

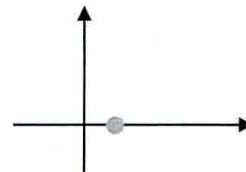


Son dos arcos parte de una circunferencia

j) $|z| = 1 \wedge \text{Re}(z) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \wedge x = 1 \Rightarrow z = (1, 0)$

Es un único punto



Ej. 8:

a) $(1+j)z = 1 \Rightarrow z = 1/(1+j) \Rightarrow z = 1-j/2 \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$

b) $\frac{1}{z} = j \Rightarrow z = \frac{1}{j} \Rightarrow z = -j$

c) $|z| - z = 1+2j \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x - yj = 1+2j \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x = 1 \wedge -y = 2$

$\Rightarrow y = -2 \wedge \sqrt{x^2+4} = x+1 \Rightarrow x^2+4 = x^2+2x+1 \Rightarrow x = 1.5$

$\Rightarrow z = 1.5 - 2j$

d) $z^2 = 3+4j \Rightarrow z = 2+j \vee z = -2-j$

e) $z^2 = 5-12j \Rightarrow z = 3-2j \vee z = -3+2j$

f) $z^2 - (2+j)z + (-1+7j) = 0 \Rightarrow z = 3-j \vee z = -1+2j$

g) $z^2 - (5+3j)z + (4+20j) = 0 \Rightarrow z = 5-j \vee z = 4j$

h) $(2+j)z^2 - (5-j)z + (2-2j) = 0 \Rightarrow z = 1-j \vee z = 4/5 - 2/5j$

i) $z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} \Rightarrow z = \sqrt{4j} \vee z = \sqrt{-4j}$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}; z_2 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}; z_3 = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}; z_4 = \sqrt{2} - j\sqrt{2}$

j) $z^2 = (1 - j)^4 \Rightarrow z = \pm \sqrt{(1-j)^4} = \pm (1 - j)^2 \Rightarrow z = \pm (1 - 2j - 1) = \pm (-2j)$
 $\Rightarrow z = 2j \vee z = -2j$

Ej. 9:

a) Sea la raíz real: $z_1 = a$ y la raíz no real: $z_2 = b + cj$, entonces la ecuación es:
 $z^2 - (a + b + cj) \cdot z + a \cdot (b + cj) = 0$

Por ejemplo, si queremos que las raíces sean $z_1 = 3$ y $z_2 = -2 + j$, la ecuación es: $z^2 - (1 + j) \cdot z + (-6 + 3j) = 0$

b) Si todos los coeficientes fueran reales, ambas raíces serían conjugadas entre sí, o sea es imposible que una sea real y la otra compleja no real.

Ej. 10:

Par ordenado	Binómica	Polar	Trigonométrica	Exponencial
$(\sqrt{3}, 1)$	$\sqrt{3} + j$	$[2; \pi/6]$	$2(\cos \pi/6 + j \sen \pi/6)$	$2 e^{j\pi/6}$
$(-2, -2\sqrt{3})$	$-2 - 2\sqrt{3}j$	$[4; 4\pi/3]$	$4(\cos 4\pi/3 + j \sen 4\pi/3)$	$4 e^{j4\pi/3}$
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\sqrt{2} + \sqrt{2}j$	$[2; \pi/4]$	$2(\cos \pi/4 + j \sen \pi/4)$	$2 e^{j\pi/4}$
$(-3, 0)$	-3	$[3; \pi]$	$3(\cos \pi + j \sen \pi)$	$3 e^{j\pi}$
$(-4, 4)$	$-4 + 4j$	$[4\sqrt{2}; 3\pi/4]$	$4\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + j \sen 3\pi/4)$	$4\sqrt{2} e^{j3\pi/4}$
$(-\sqrt{3}/2, 1/2)$	$-\sqrt{3}/2 + 1/2j$	$[1; 5\pi/6]$	$\cos 5\pi/6 + j \sen 5\pi/6$	$e^{j5\pi/6}$
$(0, -8)$	$-8j$	$[8; 3\pi/2]$	$8(\cos 3\pi/2 + j \sen 3\pi/2)$	$8 e^{j3\pi/2}$

Ej. 11:

a) $z = -30j$

b) $z = 2 e^{j(\pi/12)}$

c) $z = 128$

Ej. 12:

a) $n = 3k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$.

b) Menor valor $n = 3 \Rightarrow z^3 = 8$

c) No es posible.

Ej. 13:

- a) $w_0 = [1; \frac{\pi}{2}]$ $w_1 = [1; 7\frac{\pi}{6}]$ $w_2 = [1; 11\frac{\pi}{6}]$
- b) $w_0 = [\sqrt[8]{2}; \frac{\pi}{16}]$ $w_1 = [\sqrt[8]{2}; 9\frac{\pi}{16}]$ $w_2 = [\sqrt[8]{2}; 17\frac{\pi}{16}]$ $w_3 = [\sqrt[8]{2}; 25\frac{\pi}{16}]$
- c) $w_0 = [1/\sqrt[6]{2}; 19\frac{\pi}{36}]$ $w_1 = [1/\sqrt[6]{2}; 43\frac{\pi}{36}]$ $w_2 = [1/\sqrt[6]{2}; 67\frac{\pi}{36}]$
- d) $w_0 = [\sqrt[6]{2}; \frac{\pi}{9}]$ $w_1 = [\sqrt[6]{2}; 4\frac{\pi}{9}]$ $w_2 = [\sqrt[6]{2}; 7\frac{\pi}{9}]$ $w_3 = [\sqrt[6]{2}; 10\frac{\pi}{9}]$
 $w_4 = [\sqrt[6]{2}; 13\frac{\pi}{9}]$ $w_5 = [\sqrt[6]{2}; 16\frac{\pi}{9}]$
- e) $w_0 = [\sqrt[8]{1/2}; \frac{\pi}{16}]$ $w_1 = [\sqrt[8]{1/2}; 9\frac{\pi}{16}]$ $w_2 = [\sqrt[8]{1/2}; 17\frac{\pi}{16}]$ $w_3 = [\sqrt[8]{1/2}; 25\frac{\pi}{16}]$
- f) $w_0 = [\sqrt{3}; \frac{\pi}{4}]$ $w_1 = [\sqrt{3}; 7\frac{\pi}{12}]$ $w_2 = [\sqrt{3}; 11\frac{\pi}{12}]$ $w_3 = [\sqrt{3}; 5\frac{\pi}{4}]$
 $w_4 = [\sqrt{3}; 19\frac{\pi}{12}]$ $w_5 = [\sqrt{3}; 23\frac{\pi}{12}]$

Ej. 14:

- a) $w_0 = [1; 0] = 1$; $w_1 = [1; 2\frac{\pi}{3}] = -1/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}j$; $w_2 = [1; 4\frac{\pi}{3}] = -1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

Observando la tabla de este conjunto con la multiplicación:

•	w_0	w_1	w_2
w_0	w_0	w_1	w_2
w_1	w_1	w_2	w_0
w_2	w_2	w_0	w_1

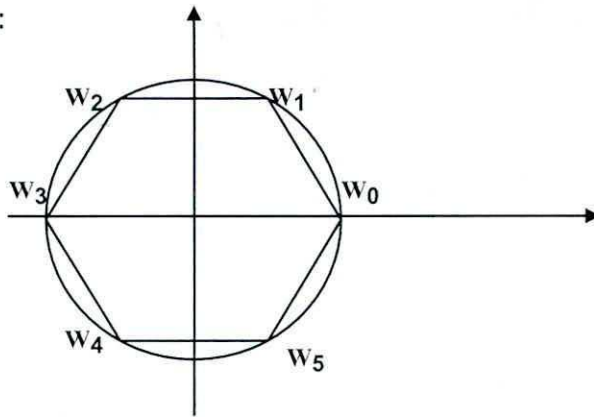
Vemos que la operación es cerrada, es asociativa y conmutativa, tienen neutro (w_0) y todos tienen inverso, entonces es un grupo abeliano.

- b) Si $n = 18$ son primitivas: $w_1, w_5, w_7, w_{11}, w_{13}$ y w_{17}
- c) Si n es primos, todas las w_k son primitivas excepto la w_0

Ej. 15:

- a) $w_0 = [1; 0]$ $w_1 = [1; \frac{\pi}{3}]$ $w_2 = [1; 2\frac{\pi}{3}]$ $w_3 = [1; \pi]$ $w_4 = [1; 4\frac{\pi}{3}]$ $w_5 = [1; 5\frac{\pi}{3}]$

La gráfica es:



b) $z = (5j)^3 = -125j$; $w_0 = [5; \frac{\pi}{2}] = 5j$; $w_1 = [5; 7\frac{\pi}{6}]$; $w_2 = [5; 11\frac{\pi}{6}]$

c) Vértices: $v_1 = (3 ; 4)$, $v_2 = (-4 ; 3)$, $v_3 = (-3 ; -4)$ y $v_4 = (4 ; -3)$

d) Vértices: $v_1 = 1 + j$, $v_2 = -1 + j$, $v_3 = -1 - j$, $v_4 = 1 - j$

e) Como $z = -64j$ tiene módulo 64, sus raíces sextas tienen módulo 2, que es la medida de los lados del hexágono, entonces su área es: $6\sqrt{3}$.



Ej. 16:

a) FALSO, por ejemplo w_4 es primitiva de orden 7, pero 4 no es primo.

b) VERDADERO, ya que si n es impar el m.c.d.($n, 2$) = 1

c) VERDADERO, pues los argumentos son $\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}$ y $7\frac{\pi}{4}$. Como todas tienen

el mismo módulo resultan ser w_1 la conjugada de w_4 , y w_2 conjugada de w_3 .

d) VERDADERO, si $n = 30$ son primitivas: $w_1, w_7, w_{11}, w_{13}, w_{17}, w_{19}, w_{23}, w_{29}$



Ej. 17:

a) $\ln z = \ln \sqrt{6} + (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)j$ b) $\ln z = \ln 4 + (\pi + 2k\pi)j$

c) $\ln z = 2k\pi j$ d) $\ln z = \ln \sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)j$ e) $\ln z = (-3\frac{\pi}{2} + 2k\pi)j$



Ej. 18:

Los valores de $k \in \mathbb{R}$ son: $k = -\frac{7}{2} \vee k = -\frac{9}{2}$



Ej. 19:

a) $z = 0$

b) $z = \frac{3}{2}$

c) $z = e^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + j)$

d) $|z| = e^{(-\pi/6)}$

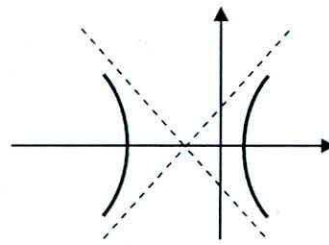
e) $z = 10/11$

f) $z = e^{-15/4\pi}$

Ej. 20:

a) $(x+1)^2 - y^2 = 4$

Hipérbola equilátera de centro $C(-1;0)$ eje focal x.



b) $B_1 = \{ z \in \mathbb{C} / z^5 + 4 - 4j = 0 \}$ son cinco puntos

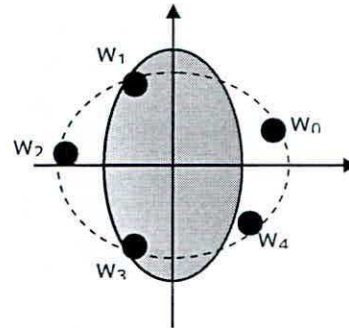
$B_2 = \{ z \in \mathbb{C} / 5|z|^2 + 3 \operatorname{Re}(z^2) \leq 8 \}$

es una elipse de centro $(0;0)$ y su interior

La intersección son los puntos:

$w_1 = [\sqrt{2} ; \frac{11}{20} \pi]$

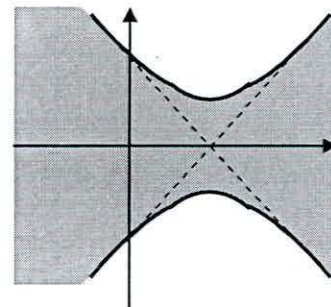
$w_3 = [\sqrt{2} ; \frac{27}{20} \pi]$



c) Un solo punto $C = \{ 4 + j \}$.

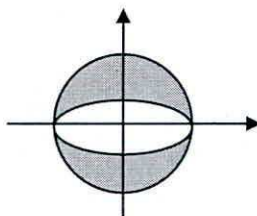
d) Interior de hipérbola: $-(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$

centro en $C(2;0)$



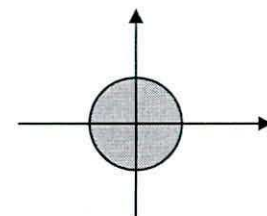
e) Rosca entre círculo y elipse.

$x^2 + y^2 \leq 3 \wedge x^2 + 9y^2 \geq 9$

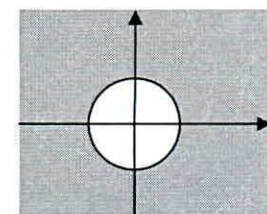


Ej. 21:

a) El conjunto $D = \{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \}$ está formado por todos los complejos de módulo menor o igual a uno, es decir los que están ubicados a una distancia menor o igual de una unidad del origen de coordenadas, o sea en un círculo de radio 1 con centro en el origen:



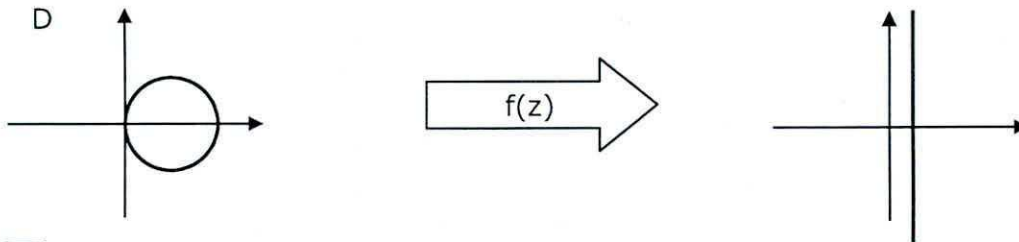
Al aplicar la función f , que invierte los complejos, obtenemos complejos de módulo mayor o igual a uno, es decir el exterior del círculo:



b) El conjunto $D = \{ z \in \mathbb{C} / |z - 1| = 1 \}$ es una circunferencia de centro en (1,0) y radio $r=1$, cuya ecuación es: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ o bien $x^2 + y^2 = 2x$

Al aplicarle la función $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+jy} = \frac{1}{x+jy} \cdot \frac{x-jy}{x-jy} = \frac{x-jy}{x^2+y^2} = \frac{x-jy}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{jy}{2x}$

Es decir todas las imágenes de la función aplicada a los elementos del conjunto D, son los complejos con parte real igual a 0.5. Su gráfica es una recta.



Ej. 22:

- a) $f+g(t) = 9.434 \cos(2t - 0.035)$
- b) $f+g(t) = 0.517 \sin(5t - \pi/12)$
- c) $f+g(t) = 1.217 \sin(2t - 0.13)$
- d) $f+g(t) = 7.21 \cos(3t - 0.98)$
- e) $f+g(t) = 6.29 \cos(3t - 0.38)$

Ej. 23:

- a) Falso b) Falso c) Verdadero

Ej. 24:

$\varphi = 2/3 \pi$

Ej. 25:

Es suma de funciones de distinta frecuencia, ya que no es una función senoidal.

Ej. 26:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c	a	b	a	a	d	c	a	a	c	a	b	b	a